República de Honduras
Secretaría de Educación

Guía del Docente

Séptimo grado

7



III Ciclo

Matemáticas

Presidencia de la República de Honduras

Secretaría de Estado en el Despacho de Educación

Subsecretaría de Asuntos Técnico Pedagógicos

Subsecretaría de Asuntos Administrativos y Financieros

Dirección General de Formación Profesional

Se elaboró en la Fase II del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM), que ejecutó la **Secretaría de Educación** en coordinación con la **Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM)** y el apoyo técnico y financiero de la **Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)**.

Primera Edición 2007

Equipo Técnico de Matemáticas:
Luis Antonio Soto Hernández
Víctor Manuel Machado

Equipo Técnico de diagramación:
Carlos Galindo - Diseñador Gráfico
Karen W. Sunsin - Digitalizadora
Brenda García - Digitalizadora

Revisión 2014

Equipo Técnico de Matemáticas:
Osiris Cecilia Urbina Núñez
Donaldo Cárcamo

Diagramación:
Raúl Antonio Urquía Sorto

Revisión Técnico Gráfico y Pedagógico 2016
Dirección General de Tecnología Educativa

1ª Calle entre 2ª y 4ª avenida,
Comayagüela, M.D.C., Honduras, C.A.
www.se.gob.hn
Matemáticas, Séptimo grado, Guía del Docente
Edición revisada 2014

ISBN: 978-99926-34-76-9

República de Honduras
Secretaría de Educación

Guía del Docente

Séptimo grado

7



III Ciclo

Matemáticas

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

PRESENTACIÓN

La **Secretaría de Educación**, presenta la **"Guía del Docente",** ***Séptimo grado, del área de Matemáticas para el Tercer Ciclo de Educación Básica***, que tiene su fundamento en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica (DCNEB), misma que fue elaborada con el apoyo de un equipo técnico de la ***Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán*** (UPNFM) y el ***Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas*** (PROMETAM).

El propósito de esta Guía es apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido del libro y las formas de aprendizaje de los estudiantes. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos que impacten en la motivación de los jóvenes y como consecuencia, se incremente la retención y aprobación con elevación del rendimiento académico, en los Centros de Educación Básica.

En la búsqueda del camino hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riqueza a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes se comprometan a realizar una labor educativa con calidad y pertinencia.

La Secretaría de Educación, sigue comprometida para que la población tenga acceso a un nivel de educación que mejore en cada generación y por ende, que se logre el desarrollo educativo a nivel nacional.

Secretaría de Estado en el Despacho de Educación

Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

Desarrollo de clases

Columnas

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basados en el contenido del Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNEB). Si el o la Docente aprovecha esta guía, le ayudará a desarrollar sus clases efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura global: Está formada por dos partes: **"Estructura y aplicación de la Guía del Docente"** que explica el contenido de la Guía del Docente y la forma cómo se utiliza y **"Desarrollo de clases de cada unidad"** que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la unidad: En cada unidad se desarrollan paso a paso los contenidos conceptuales y actitudinales tomados del DCNEB. La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y el Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el DCNEB, utilizando eficientemente el Libro del Estudiante (LE), y para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar la clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El Docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la "Programación anual" y "Desarrollo de clases de cada unidad".

«Programación Anual»

Es la lista de los contenidos del grado, indicados en el DCNEB, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan anual de modo que se cubran todos los temas.

También se presenta la distribución de horas en función de los cinco bloques de área que se describen en el DCNEB. Estos son:

1. Números y operaciones
2. Álgebra
3. Geometría
4. Estadística descriptiva y probabilidad discreta

Si los estudiantes no manejan bien los contenidos de cada grado, tendrán problemas con el aprendizaje en los grados posteriores. Por ejemplo: los estudiantes necesitan tener dominio de la operatoria con números reales y con las expresiones algebraicas racionales.

«Desarrollo de clases de cada unidad»

Está dividida en cinco secciones:

1. Expectativas de logro: Presenta las expectativas de logro de la unidad.
2. Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado relacionándolos con los del grado anterior y el siguiente.
3. Plan de estudio: Presenta la distribución de las clases en cada lección.
4. Puntos de lección: Presenta la esencia y el resumen del desarrollo del estudio en cada lección.
5. Desarrollo de clases: Presenta el objetivo y el desarrollo de cada clase.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases

Número de la lección

Actividades de los estudiantes

Preguntas, comentarios e indicaciones del maestro o la maestra

Puntos y sugerencias de la enseñanza y actividades del maestro o la maestra

Reacciones previsibles de los estudiantes

Título de la lección

Hora actual de la clase / total de horas

Objetivo de cada clase

Materiales que se utilizan en cada clase

Página del LE

Lección 3: (1~2/20) **Multiplicación**

Objetivo: • Interpretar el sentido de la multiplicación de dos números en términos de la velocidad, el tiempo y la posición.

Materiales: (M) Láminas con los dibujos de las situaciones mostradas en [A].

1. Captar el sentido de la multiplicación por números negativos. [A1]

M: ¿Cuál es el sentido de 4 x 3?

RP: 4 + 4 + 4, 3 veces 4.

M: ¿Y el de (-80) x 5?

RP: (-80) + (-80) + (-80) + (-80) + (-80) = - 400

M: ¿Y el de (-80) x (-5)?

RP: ¿ ?

M: ¿Qué podemos hacer?

* Es probable que los estudiantes no tengan respuesta para estas dos últimas preguntas por lo que habrá que estudiar la siguiente situación.

2. Interpretar la multiplicación de dos números positivos. [A2]

* Interpretar el caso de María analizando los dibujos.

M: ¿Cómo se interpreta 80?, ¿y 5?

RP: 80 significa que avanza 80 metros por minuto hacia el este. 5 significa que han transcurrido 5 minutos después de ahora.

M: Después de 5 minutos ¿cuántos metros ha avanzado María y en cuál dirección?

RP: 400 metros al este.

M: ¿Con cuál PO podemos expresar la situación anterior?

RP: 80 x 5.

M: En el PO 80 x 5 = 400 ¿cuál es la interpretación de cada uno de los números?

* Concluir que 80 se interpreta como la velocidad, 5 como el tiempo transcurrido y 400 como la posición después de 5 minutos a una velocidad de 80 metros por minuto.

* Concluir que el PO anterior se interpreta como (velocidad) x (tiempo) = (posición).

3. Interpretar la velocidad, el tiempo y la posición en términos negativos.

M: Si la velocidad hacia el este se considera positiva ¿cómo se considera la velocidad hacia el oeste?

Lección 3: Multiplicación y división

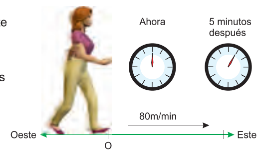
Sección 1. Multiplicación

A1 ¿Cuánto es (-80) x 5?

(-80) x 5 = (-80) + (-80) + (-80) + (-80) + (-80) = -400

De esta manera no se entiende el sentido de (-80) x (-5) y tampoco no se calcula. Para extender el sentido de la multiplicación a los números negativos vamos a utilizar la situación de **A8** en la lección 1.

2 María está caminando hacia el este a la velocidad de 80 metros por minuto en una carretera que se prolonga de oeste hacia este. Ahora está en el punto O. Después de 5 minutos ¿dónde estará?



PO: 80 x 5 = 400

R: 400 m (Estará a 400 metros hacia el este desde el punto O)

El PO anterior se puede interpretar como: (velocidad) x (tiempo) = (posición).

Así se interpreta que "velocidad negativa" expresa la velocidad hacia el oeste, que "tiempo negativo" expresa el tiempo antes de ahora y que "posición negativa" expresa la distancia desde el punto O hacia el oeste.

3 Si se interpretan los números negativos en este PO como lo muestra la tabla que se presenta a continuación se puede expresar la respuesta de las preguntas de las siguientes situaciones con la multiplicación.

	Velocidad	Tiempo	Posición
Cero	No se mueve	Ahora	El punto O
Positivo	Se camina hacia el este	Futuro	Desde el punto O hacia el este
Negativo	Se camina hacia el oeste	Pasado	Desde el punto O hacia el oeste

RP: Negativa

* Hacer preguntas similares con el tiempo antes de ahora y la posición que corresponde a la distancia desde el punto O hacia el oeste?

4. Analizar la velocidad, el tiempo y la posición cuando los valores son positivos, negativos o cero. [A3]

* Indicar a los estudiantes que inventen PO para cada una de las posibilidades y las interpreten. Por ejemplo: 40 x 7, 9 x (-10), (-12) x 7 y (-20) x (-15).

Continúa en la siguiente página...

1 Expectativas de logro

Se presentan para cada unidad, tal y como están descritas en el DCNEB.

2 Relación y desarrollo

Se enumeran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores o posteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes pueden manejar bien los contenidos relacionados de los grados anteriores. Sino, dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase. Para el mejor manejo del contenido, es mejor darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien, se les puede dar orientación individual a los demás estudiantes.

3 Plan de estudio

Se indican la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, no se recomienda utilizar todo el tiempo disponible para cubrir sólo unas cuantas unidades.

4 Puntos de lección

Como cada unidad está dividida en lecciones, en esta parte se explican los principios de sus contenidos y los puntos en que se debe prestar atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por la cual se desarrolla el plan de clase.

5 Desarrollo de clases

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, los materiales y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

«Objetivo»

Representa el objetivo de la clase (hay casos donde un solo objetivo se aplica a dos o más clases seguidas). Es necesario tener un objetivo claro para cada clase.

«Materiales»

Se indican los materiales didácticos que se utilizan en la clase. Es recomendable verlos de antemano porque hay materiales que necesitan tiempo para su preparación. Si se realiza la clase de otra forma a la explicada en la GD, puede que se necesite otro tipo de material que no esté indicado. Por ejemplo: una lámina de un dibujo del LE.

Hay que saber usar los materiales, ya que la clase no necesariamente es mejor si se usan más materiales. Es importante usar aquellos que sean adecuados a la situación, considerando la etapa del desarrollo mental de los estudiantes y la etapa de la enseñanza. No es siempre necesario seguir las tres etapas (concreta, semiconcreta y abstracta) en cada clase.

«Proceso de enseñanza»

Está numerado según el proceso del desarrollo de la clase. En vez de realizar la clase de la misma forma de principio a fin, es deseable distinguir las actividades de cada etapa destacando el objetivo específico, de modo que los estudiantes no se aburran. Además, para que los estudiantes tengan suficiente tiempo para pensar por sí mismos y resolver los ejercicios, los docentes tienen que darles una explicación de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho.

En este proceso de enseñanza se utilizará la siguiente simbología: M, RP y *.

M: significa pregunta o indicación de los docentes a los estudiantes.

No es bueno hacer solamente preguntas que se pueden contestar con palabras breves como ser «sí» y «no». Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes. Sobre todo, en cada clase se necesita una pregunta principal que los atraiga al tema de la clase.

RP: significa reacciones previsibles de los estudiantes.

Hay que prever las reacciones de los estudiantes, incluyendo las respuestas equivocadas. Para corregir las respuestas equivocadas, no es bueno decir solamente «está mala», y enseñar la respuesta correcta o hacer que contesten otros niños. Hay que dar tiempo para que piensen por qué está equivocada. Al mismo tiempo, los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de los estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

*: Hace referencia a los puntos y sugerencias de la enseñanza y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases, se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones:

1. La GD no dice nada sobre la evaluación continua, porque ésta corresponde al objetivo y es fácil de encontrar. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
2. No está indicado el repaso de la clase anterior, hay que hacerlo según la necesidad.
3. Cuando se les dan los ejercicios, los docentes tienen que recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
4. Cuando la cantidad de los ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores cada 5 ejercicios, o una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
5. Preparar tareas, como ser ejercicios suplementarios, para los estudiantes que terminan rápido.
6. La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible. Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:
   - cuando recorren el aula después de dar los ejercicios
   - en el receso, después de la clase
   - en la revisión del cuaderno (hay que tener cuidado que los estudiantes no pierdan tiempo haciendo cola para que el docente los corrija)

La manera de cómo trabajar con los problemas planteados (de aplicación)

Los problemas planteados deben trabajarse siguiendo los pasos dados a continuación:

1. Escribir el planteamiento de la operación (PO).
2. Juzgar si el PO es el adecuado.
3. Efectuar el cálculo, según la necesidad.
4. Juzgar si el resultado es el adecuado.
5. Escribir la respuesta (R) con la unidad necesaria.

Siempre que se requiere PO y R hay que evaluarlos por separado, es decir, si está bien el PO y si está bien la R.

Ejemplo:

> Ana compró un bolígrafo de 7 lempiras y 3 cuadernos. Pagó 34 lempiras por todo. ¿Cuál es el precio de un cuaderno?

Si el precio de un cuaderno es x se tiene:

PO: $7 + 3x = 34$ →

Cálculo:

$$7 + 3x = 34$$
$$3x = 34 - 7$$
$$3x = 27$$
$$x = \frac{27}{3}$$
$$x = 9$$

R: 9Lempiras.

Primero se juzga que la respuesta se puede encontrar con el PO. Luego se efectua el cálculo y se completa la respuesta con las unidades respectivas.

Si algún estudiante escribe bien el PO pero se equivoca en el cálculo o en la respuesta hay que hacer preguntas para que reaccione y reflexione sobre su error.

La estructura del LE y su uso

El docente puede empezar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar con el mismo según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, secciones, ejercicios (1 , 2 , 3 , ...) y evaluación (1 , 2 , 3 , ...). Cada lección tiene ejemplos (**A**, **B**, **C**, …) y ejercicios (1 , 2 , 3 , …).

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la lección y están ilustrados con dibujos o gráficas que ayudan a los estudiantes a entenderlos.

En la orientación de estos ejemplos, lo importante es hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes los dibujan en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de encontrarla, aun cuando la Guía dice «Leer el problema… o captar la situación».

Las respuestas de los ejemplos están marcados con el signo ✓.

La GD lleva la pauta de los ejercicios y problemas del LE (en color rojo). Los docentes tienen que tomar en cuenta que en los casos de ejercicios y problemas con respuestas abiertas pueden haber otras respuestas.

Para resaltar los puntos importantes de un tema se utiliza  y para algunas explicaciones relevantes .

Los ejercicios del cálculo están clasificados por criterios, los cuales pueden ser consultados en la GD.

Un objetivo del LE es suministrar suficiente cantidad de ejercicios clasificados, por lo tanto, en el LE a veces hay más ejercicios que los que se pueden resolver en el aula. Los docentes tienen que elegir cierta cantidad de ejercicios de cada grupo clasificado de modo que los estudiantes puedan resolver de todos los tipos. Los demás ejercicios se pueden utilizar como tarea en casa, ejercicios suplementarios para los estudiantes que resuelven rápido o, en otros casos, tarea mientras esperan la indicación del docente.

En la sección de ejercicios (1 , 2 , 3 , ...), el trabajo con los mismos está incluido en las horas de clase de la unidad.

La sección de evaluación (1 , 2 , 3 , ...) que aparece al final de cada unidad, el docente podrá utilizarla a su conveniencia y en beneficio de los estudiantes. No se tiene estipulado tiempo para esta sección.

Ademas, en el LE y GD aparecen otros tipos de íconos como los siguientes; 1 se utiliza para indicar y señalar los pasos a seguir; 1 se utiliza para indicar y señalar propiedades y criterios; los números encerrados en paréntesis de color negro **(1)** se ultilizan para enumerar ejercicios, problemas, ejemplos y cuando aparecen en color azul **(1)** es para evitar confusion en los ejercicios de multiplicación y división.

4. Programación anual

(Total 148 horas)

Mes	Unidad (horas)	Pág. de GD (Pág. de LE)	Contenidos
2 3 4	1. Números positivos y negativos (40 horas)	2~51 (2~45)	• Uso de los números positivos y negativos • Representación gráfica en la recta numérica • Relación de orden • Valor absoluto • Adición, sustracción, multiplicación y división con números positivos y negativos • Propiedades • Conversión de fracciones a decimales • Fracción compleja • Potencias y raíces • Exponente negativo • Operaciones combinadas
5 6	2. Variables y expresiones (27 horas)	52~83 (46~73)	• Expresiones algebraicas • Expresiones algebraicas con multiplicación, potencias y división • Expresión de cantidades con variables • Valor numérico • Producto de expresiones algebraicas por un número • Términos semejantes • Adición y sustracción • Fórmulas
6 7	3. Ecuaciones de primer grado en una variable (22 horas)	84~109 (74~95)	• Igualdades numéricas • Ecuaciones • Solución de una ecuación • Propiedades de la igualdad • Transformación de una ecuación • Aplicación de las propiedades de la igualdad • Solución de ecuaciones de primer grado • Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado
7 8	4. Razón, proporcionalidad y por ciento (25 horas)	110~139 (96~121)	• Razón • Razón inversa • Proporción • Aplicación de la proporción • Proporcionalidad directa • Proporcionalidad inversa • Aplicación de la proporcionalidad • Cálculo del por ciento • Cálculo del tanto por ciento de un número • Cálculo del total dado un número y su por ciento

9	5. Gráficas de faja y circulares (10 horas)	140~151 (122~131)	• Gráficas de faja • Gráficas circulares
	6. Conjunto de puntos (5 horas)	152~163 (132~141)	• Definición de punto, recta y plano • Definición de rayo y segmento • Longitud y congruencia de segmentos • Distancia y punto medio de un segmento • Bisector de un segmento y puntos colineales
10	7. Ángulos (19 horas)	164~191 (142~165)	• Definición de ángulo • Clasificación • Ángulos congruentes • Construcciones • Bisectriz • Rectas perpendiculares • Mediatriz

Distribución de las horas en cada bloque de área

Bloque de área	Unidades	Horas
1: Números y operaciones	1, 4	65
2: Álgebra	2, 3	49
3: Geometría	6, 7	24
4: Estadística descriptiva y probabilidad discreta	5	10
	Total	148

Desarrollo de clases



Números positivos y negativos

Unidad 1

(40 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan el concepto de un número opuesto.
- Distinguen entre números positivos y negativos.
- Desarrollan el concepto de número entero.
- Representan números enteros en la recta numérica.
- Identifican el valor absoluto de un número entero.
- Dominan las operaciones básicas con números enteros para resolver problemas de la vida real.
- Resuelven problemas de la vida real que implican números enteros.
- Identifican números racionales en problemas de la vida real y usan las operaciones básicas para resolverlos.
- Reconocen en situaciones de la vida real la conveniencia de los números decimales.
- Utilizan números decimales en la solución de problemas de la vida real.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Números positivos y negativos
- Uso de los números positivos y negativos
- Representación gráfica
- Relación de orden
- Valor absoluto
- Adición de números con igual signo y diferente signo
- Propiedad conmutativa y asociativa de la adición
- Sustracción
- Multiplicación
- Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación
- División
- Conversión de fracciones a decimales
- Recíproco o inverso multiplicativo
- Fracción compleja
- Potencias y raíces
- Exponente negativo
- Operaciones combinadas
- Propiedad distributiva
- Aplicación de los números negativos

Razón, proporcionalidad y por ciento
- Razones y proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad
- Tanto por ciento

Octavo grado

Números reales
- Raíz cuadrada
- Relación de orden con la raíz cuadrada
- Valor de la raíz cuadrada de un número
- Números irracionales
- Números reales
- Operaciones con raíces cuadradas
- Racionalización
- Raíz cúbica
- Intervalos en la recta numérica
- Potenciación
- Propiedades de los exponentes
- Notación cientifica

Tanto por ciento
- Tanto por ciento mayor que 100 y menor que 1
- Conversión entre tanto por ciento y fracciones

Noveno grado

Interés
- Interés simple
- Interés compuesto

3 Plan de estudio (40 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Números positivos y negativos (11 horas)	1~5/11	• Uso de los números positivos y negativos
	6~7/11	• Representación gráfica
	8~9/11	• Relación de orden
	10~11/11	• Valor absoluto
2. Adición y sustracción de números positivos y negativos (7 horas)	1/7	• Adición de números con igual signo
	2/7	• Adición de números con diferente signo
	3/7	• Propiedad conmutativa y asociativa de la adición
	4~6/7	• Sustracción
	7/7	• Planteamiento sólo con adición
3. Multiplicación y división de números positivos y negativos (20 horas)	1~4/20	• Multiplicación
	5~6/20	• Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación
	7~8/20	• División
	9~20	• Conversión de fracciones a decimales
	10~11/20	• Recíproco o inverso multiplicativo
	12/20	• Fracción compleja
	13/20	• Potencias y raíces
	14~16/20	• Exponente negativo
	17~18/20	• Operaciones combinadas
	19/20	• Propiedad distributiva
	20/20	• Aplicación de los números negativos
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	
Evaluación	No hay horas	

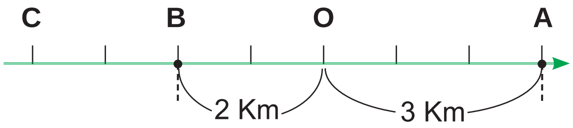
4 Puntos de lección

Lección 1: Números positivos y negativos

Se introducen los números negativos como números que tienen características o sentidos opuestos a los números positivos. En la siguiente tabla se muestran estos sentidos.

Ejemplo en el LE	*Cantidad positiva*	*Cantidad negativa*	*Punto de referencia*
1~2	Temperatura más alta que 0°C	Temperatura más alta que 0°C	0 °C
3	Altura	Profundidad	Nivel del mar
4	Punto hacia el Este	Punto hacia el Oeste	Punto O
5	Futuro	Pasado	Ahora
6	Ganancia o ingreso	Pérdida o egreso	No hay movimiento de dinero
7	Movimiento hacia el Este	Movimiento hacia el Oeste	No hay movimiento

Por ejemplo en A4, el punto A corresponde a +3 y el punto B corresponde a -2.



Si se cambia la dirección positiva cambia el signo (Si se toma hacia el oeste como la dirección positiva, el punto A corresponde a -3 y el punto B a +2). Asimismo si se cambia el punto de referencia, cambian los números que corresponden (Si se toma el punto C como punto de referencia el punto A corresponde a +7 y el punto B a +2).

Después de introducir el concepto de cantidad negativa con estos ejemplos, se abstrae el concepto de número negativo (es decir números sin unidad de medida) y se ubican en la recta numérica.

El punto que corresponde al 0 (cero) se llama origen y se expresa con la letra O.

Se define la relación de orden (dimensión) de los números en la recta numérica diciendo que los números que están más a la derecha son mayores.

Se define el valor absoluto de un número como la distancia entre ese número y el origen.

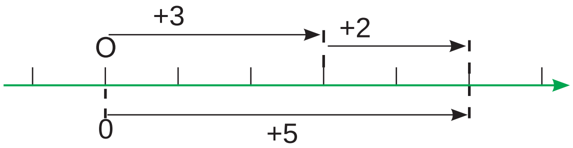
Lección 2: Adición y sustracción de números positivos y negativos

Definición de la adición

En el LE se define la adición como el compuesto de dos movimientos (expresados éstos con flechas en la recta numérica).

Es decir; (primer movimiento) + (segundo movimiento) = (posición final).

Ejemplo: (+3) + (+2)

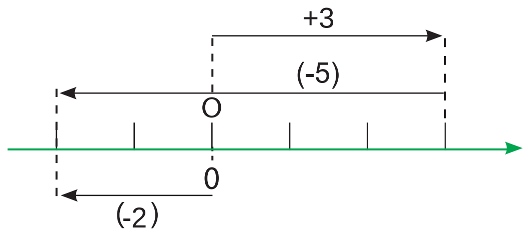


El punto de partida de la segunda flecha (+2) comienza donde termina la primera (+3). La flecha resultante o tercera flecha (+5) tiene como punto de partida el punto de partida de la primera (+3) y termina donde termina la segunda (+2).

Cuando los dos sumandos son números positivos se sabe que la composición de las dos flechas se dirige hacia la derecha en la recta numérica y representa la adición de los números que corresponden a las flechas.

Como se pueden componer dos flechas cualquiera que sea la dirección, se define la adición de los dos números como el compuesto de las dos flechas correspondientes.

Ejemplo: (+3) + (-5)



Regla de la adición

Después de definir la adición se expresa la forma de la adición como se presenta a continuación de modo que los estudiantes puedan hacer el cálculo formalmente.

$a + b$, cuando a y b son del mismo signo.

Signo: El que llevan a y b

Valor absoluto: La suma de los valores absolutos de a y b.

$a + b$, cuando a y b son de diferente signo.

Signo: El del número que tiene mayor valor absoluto.

Valor absoluto: La diferencia del valor absoluto mayor menos el valor absoluto menor.

Propiedad conmutativa y asociativa de la adición

Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$.

Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

En los grados anteriores los estudiantes ya aprendieron estas propiedades con los números positivos sin mencionar los términos. La validez de éstas con los números negativos se puede comprobar manejando flechas en la recta numérica; sin embargo en el LE sólo se muestran con algunos ejemplos sin utilizar la recta numérica.

Ejemplo:

□ + ○ = ○ + □; (-4) + (+7) = (+7) + (-4)

Con estas propiedades se puede cambiar el orden de la adición (esta es la razón por la cual no se enseña el orden del cálculo usando paréntesis cuando hay sólo adiciones) y por lo general es más fácil sumar los números positivos y negativos separadamente.

Ejemplo:

(-4) + (+7) + (+5) + (-3)

= (+7) + (-4) + (+5) + (-3) ... p. conmutativa

= (+7) + (+5) + (-4) + (-3) ... p. conmutativa

= {(+7) + (+5)} + {(-4) + (-3)} ... p. asociativa

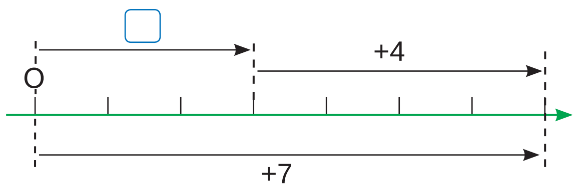
= (+12) + (-7)

= +5

Definición de la sustracción

Se define la sustracción como la operación inversa de la adición, es decir, la resta $a - b$ es la solución de la ecuación $x + b = a$.

Ejemplo: □ + (+4) = (+7)

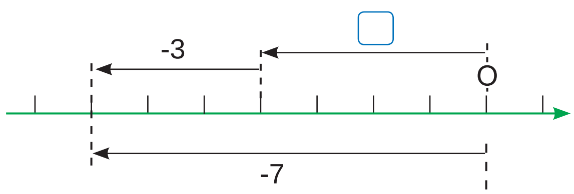


Se encuentra el número □ con la sustracción (+7) - (+4).

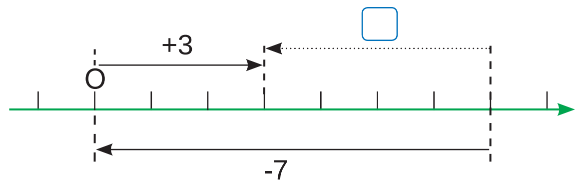
También se sabe que se obtiene el número □ componiendo la flecha que corresponde a -4 a la flecha de +7. De esta manera se deduce que restar un número equivale a sumar este número con diferente signo y con el mismo valor absoluto.

Aplicando estas observaciones se define como una sustracción donde aparece un número negativo.

Ejemplo: □ + (- 3) = -7



□ = (-7) - (-3) Para encontrar el resultado se compone la flecha +3 a la flecha -7, o sea que (-7) - (-3) = (-7) + (+3).



Regla de la sustracción

La regla de la sustracción es $a - b = a + (-b)$

Planteamiento sólo con adición

Un PO con adición y sustracción se puede convertir en un PO sólo con adición y en este PO primero se suman los números del mismo signo.

Ejemplo:

(+3) - (+5) + (-8) - (-9) =

= (+3) + (-5) + (-8) + (+9)

= {(+3)+(+9)} + {(-5)+(-8)}

= (+12) + (-13)

= -1

Se llama término a cada número de un PO sólo con adición. En el PO anterior los términos son: +3, -5, -8 y +9.

Lección 3: Multiplicación y división de números positivos y negativos

Definición de la multiplicación

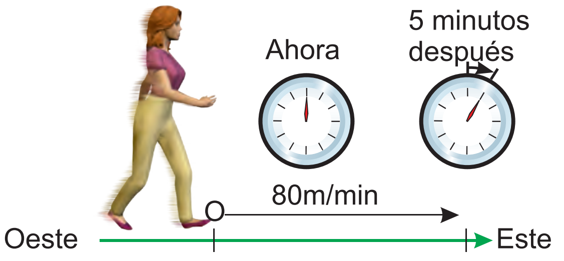
Cuando en una multiplicación el multiplicador es un número negativo por ejemplo en 80 x (-5) no se puede aplicar el sentido de la multiplicación aprendido en los grados anteriores.

Para introducir la multiplicación en el LE se utiliza el movimiento en la recta numérica igual que se hizo en el caso de la adición. Primero se presenta una situación en la que se encuentra el resultado con una multiplicación de dos números positivos y luego usando una situación semejante se extiende a los casos en que uno o ambos factores son negativos y se encuentra el producto.

Ejemplo: (+80) x (+5)

Se interpreta (+80) como "camina hacia el este a 80 m/min". Ahora está en el punto O.

¿Dónde estará 5 minutos después?



Se aplica la fórmula:

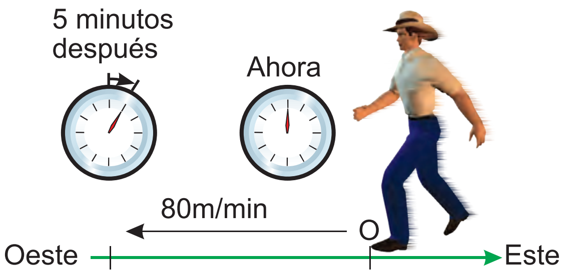
(Velocidad) x (Tiempo) = (Posición).

Como la Velocidad = +80 y el Tiempo = +5; (+80) x (+5) = +400, así la Posición = +400.

Ejemplo: (-80) x (+5)

Se interpreta (-80) como "camina hacia el oeste a 80 m/min". Ahora está en el punto O.

¿Dónde estará 5 minutos después?



Como la Velocidad = -80 y el Tiempo = +5; (-80) x (+5) = -400, así la Posición = -400.

Regla de la multiplicación

El producto de dos números se obtiene así:

Signo: Si los dos factores tienen el mismo signo el producto lleva el signo positivo (+).

Si los dos factores tienen diferente signo el producto lleva el signo negativo (-).

Valor absoluto: El valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los dos factores.

Multiplicación por 1

1 x a = a; a x 1 = a

Esta propiedad la aprendieron los estudiantes con los números positivos en los grados anteriores, aquí sólo se generalizará a los números negativos.

Multiplicación por -1

Si se multiplica por -1 cambia el signo.

Ejemplo: (+5) x (-1) = (-1) x (+5) = -5

(-5) x (-1) = (-1) x (-5) = +5

Multiplicación por cero

□ x 0 = 0, 0 x □ = 0, a x 0 = 0; 0 x a = 0

Esta propiedad la aprendieron los estudiantes con los números positivos en los grados anteriores, aquí sólo se generalizará para los números negativos.

Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación

$a \times b = b \times a$; $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Signo del producto con varios factores

Si la cantidad de los factores negativos es par, el producto lleva el signo positivo.

Si la cantidad de los factores negativos es impar, el producto lleva el signo negativo.

Raíz cúbica

Si existe la relación $a^3 = b$, se dice que el número a es la raíz cúbica de b y se escribe $a = \sqrt[3]{b}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$;

$\sqrt[3]{-8} = -2$ pues $(-2)^3 = -8$

División

En el CT se define la división como la operación inversa de la multiplicación.

□ x b = a equivale a $a \div b$ = □

La relación entre la multiplicación y la división es igual a la que existe entre la adición y la sustracción, y también lo es su forma de enseñanza.

Primero hay que asegurar la relación entre la multiplicación y la división usando los números positivos.

Ejemplo: □ x (+3) = + 12 equivale a (+12) ÷ (+3) = □

Usando esta relación se extiende la división a los números negativos.

Ejemplo:

☐ x (+3) = -12 equivale a (-12) ÷ (+3) = ☐

☐ x (-3) = +12 equivale a (+12) ÷ (-3) = ☐

☐ x (-3) = -12 equivale a (-12) ÷ (-3) = ☐

De estos ejemplos se deduce la siguiente regla de la división:

Signo: Si el signo de los dos números es igual el cociente es positivo y si los signos son diferentes el cociente es negativo.

Valor absoluto: El valor absoluto del cociente es el cociente de los valores absolutos de los dos números.

División con cero

Cuando el número a es diferente de cero, $0 \div a = 0$. No se puede dividir entre cero.

Apartir de aquí no se utilizará, por lo general, el signo+ con los números positivos.

Fracción negativa

Ejemplo: $\frac{-5}{3} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ porque

(-5) ÷ 3 = 5 ÷ (-3) = - (5 ÷ 3)

Recíproco o inverso multiplicativo

El número b que al multiplicarlo por a es igual a 1 se llama "recíproco de a" o "inverso multiplicativo de a".

Ejemplo:

Número	3	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0.4	-0.4	0
Recíproco	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	2.5	-2.5	No existe

Dividir entre un número equivale a multiplicar por su recíproco.

Ejemplo: $\frac{3}{4} \div \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{7}{8}$

Operaciones combinadas

1 Si el PO lleva multiplicación y división, se convierten las divisiones en multiplicaciones.

Ejemplo: $\frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{8}{15} = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{15}{8}$

$= -\left(\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{15}{8}\right)$

$= -1$

2 El PO lleva adición, sustracción, multiplicación y división se realizan primero las multiplicaciones y divisiones y luego las adiciones y sustracciones en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

Ejemplo:

7 x (-3) + 48 ÷ 6 = -21 + 8 = -13

1 Si el PO lleva paréntesis, se calcula primero lo que va entre paréntesis.

Ejemplo:

2 + (6 - 12) ÷ 6 = 2 + (-6) ÷ 6 = 2 + (-1) = 1

Propiedad distributiva

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$;

$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

Esta propiedad los alumnos la aprendieron en los grados anteriores con los números positivos sin mencionar su nombre. Aquí se conoce su nombre y se generaliza a los números negativos.

Aplicación

Para encontrar la suma total de datos casi iguales hay una manera que consiste en seleccionar un número que se aproxima a la media de estos datos y que se toma como punto de referencia. El total se encuentra multiplicando el punto de referencia por el número de datos y a este producto se le suma el total de las diferencias de los datos menos el punto de referencia.

Ejemplo: Se toma 70 como punto de referencia.

Datos	78	65	67	58	70	72	64	83
Dato - 70	8	-5	-3	-12	0	2	-6	13

La suma de los datos es 70 x 8 + (-3) = 557

- 70: Punto de referencia
- 8: Número de datos
- (-3): Total de las diferencias de los datos menos la media

5 Desarrollo de clases

1. Comentar lo observado en el termómetro. [A1]

M: ¿Existe algún punto de referencia para medir la temperatura con un termómetro?, ¿cuál es?

RP: Sí, el número cero.

* Explicar el significado de un punto de referencia y pedir que lo identifiquen en el termómetro.

* Solicitar que escriban la temperatura que indica el termómetro.

* Indicar que para medir la temperatura deben contar las rayitas arriba o abajo del cero según el caso.

2. Escribir la temperatura indicada en los termómetros. [A2]

M: ¿Qué temperatura marca el termómetro (d)?

RP: -12º C.

* Solicitar que escriban la temperatura para los termómetros (a) ~ (c).

3. Explicar el significado de un número negativo en relación con la temperatura.

* Indicar que para medir la temperatura se utiliza 0º como punto de referencia.

* Indicar que existen temperaturas más altas que 0º y más bajas que 0º.

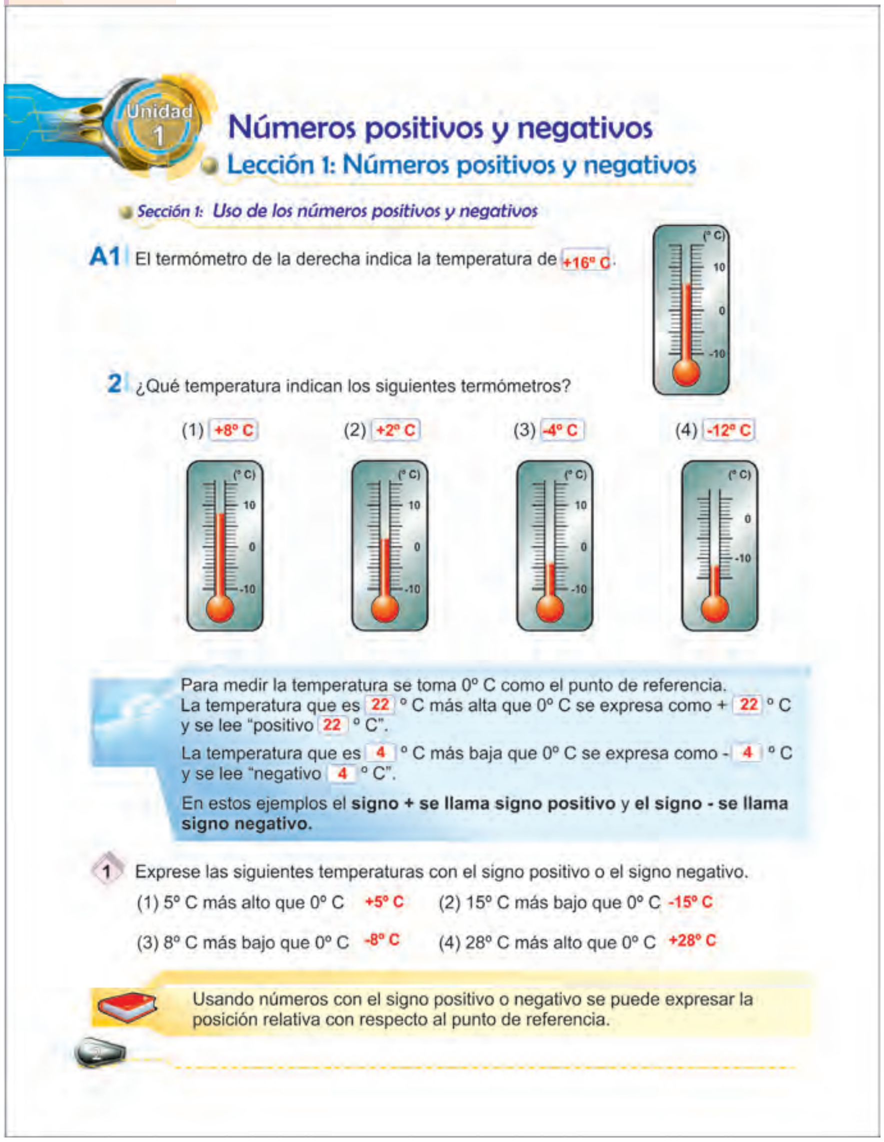
* Llenar los cuadros mostrados en la explicación.

* Explicar el uso del signo más (+) y el signo menos (-) en las temperaturas.

Lección 1: (1/11) **Números positivos y negativos**

Objetivo: • Expresar la temperatura y con números positivos y negativos.

Materiales: (M) Lámina con las ilustraciones de los termómetros.



Unidad 1

Números positivos y negativos

Lección 1: Números positivos y negativos

Sección 1: Uso de los números positivos y negativos

A1 El termómetro de la derecha indica la temperatura de +16º C.

2 ¿Qué temperatura indican los siguientes termómetros?

(1) +8º C (2) +2º C (3) -4º C (4) -12º C

Para medir la temperatura se toma 0º C como el punto de referencia.
La temperatura que es 22 º C más alta que 0º C se expresa como + 22 º C y se lee "positivo 22 º C".
La temperatura que es 4 º C más baja que 0º C se expresa como - 4 º C y se lee "negativo 4 º C".
En estos ejemplos el **signo + se llama signo positivo** y **el signo - se llama signo negativo.**

1 Exprese las siguientes temperaturas con el signo positivo o el signo negativo.

(1) 5º C más alto que 0º C +5º C (2) 15º C más bajo que 0º C -15º C

(3) 8º C más bajo que 0º C -8º C (4) 28º C más alto que 0º C +28º C

Usando números con el signo positivo o negativo se puede expresar la posición relativa con respecto al punto de referencia.

4. Resolver 1.

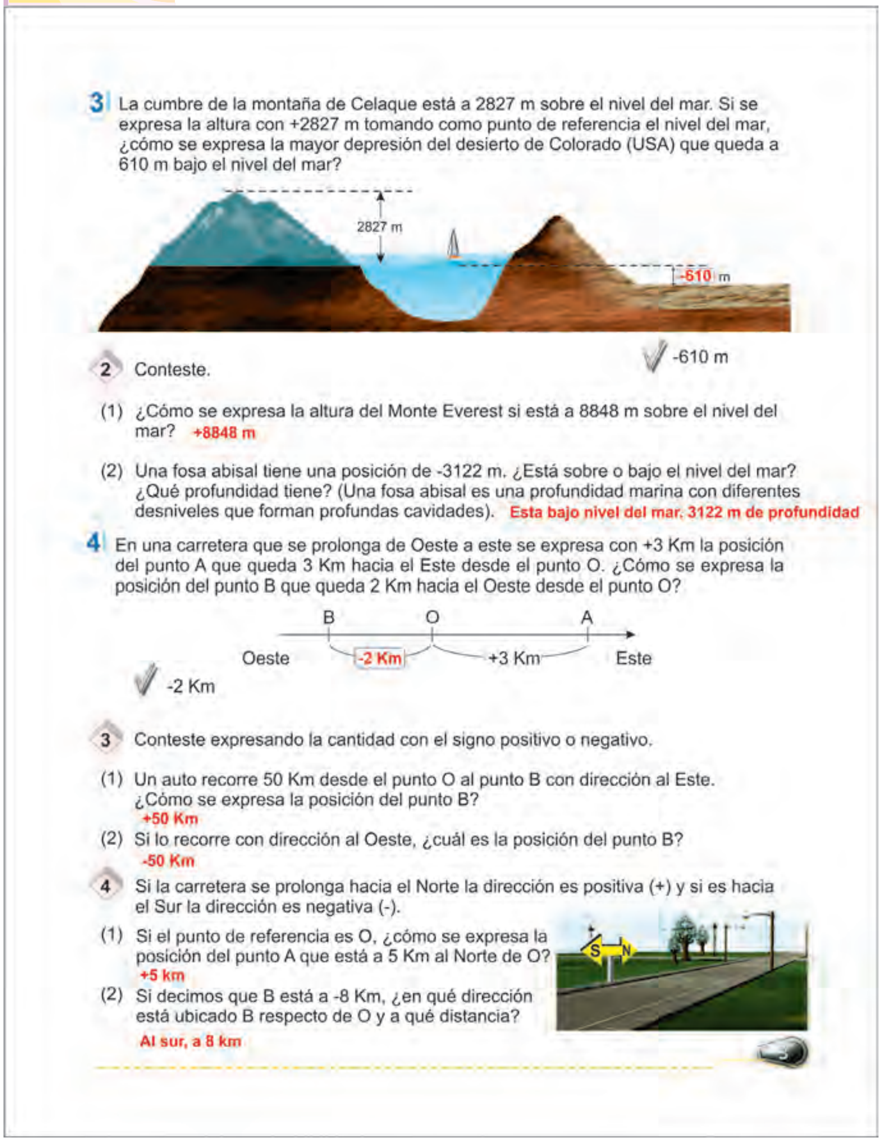
* Explicar que con el signo positivo o negativo se puede expresar la posición relativa con respecto al punto de referencia.

Lección 1: (2/11)

Números positivos y negativos

Objetivo: • Expresar el cambio en la cantidad con números positivos o negativos referente o la altura y la profundidad; o a la posición o movimiento hacia el Este a la posición o movimiento hacia el Este y el Oeste y el Norte y el Sur.

Materiales: (M) Lámina con la ilustración de la página 3 del LE.



3 La cumbre de la montaña de Celaque está a 2827 m sobre el nivel del mar. Si se expresa la altura con +2827 m tomando como punto de referencia el nivel del mar, ¿cómo se expresa la mayor depresión del desierto de Colorado (USA) que queda a 610 m bajo el nivel del mar?

-610 m

2 Conteste.

(1) ¿Cómo se expresa la altura del Monte Everest si está a 8848 m sobre el nivel del mar? +8848 m

(2) Una fosa abisal tiene una posición de -3122 m. ¿Está sobre o bajo el nivel del mar? ¿Qué profundidad tiene? (Una fosa abisal es una profundidad marina con diferentes desniveles que forman profundas cavidades). Esta bajo nivel del mar. 3122 m de profundidad

4 En una carretera que se prolonga de Oeste a este se expresa con +3 Km la posición del punto A que queda 3 Km hacia el Este desde el punto O. ¿Cómo se expresa la posición del punto B que queda 2 Km hacia el Oeste desde el punto O?

-2 Km

3 Conteste expresando la cantidad con el signo positivo o negativo.

(1) Un auto recorre 50 Km desde el punto O al punto B con dirección al Este. ¿Cómo se expresa la posición del punto B? +50 Km

(2) Si lo recorre con dirección al Oeste, ¿cuál es la posición del punto B? -50 Km

4 Si la carretera se prolonga hacia el Norte la dirección es positiva (+) y si es hacia el Sur la dirección es negativa (-).

(1) Si el punto de referencia es O, ¿cómo se expresa la posición del punto A que está a 5 Km al Norte de O? +5 km

(2) Si decimos que B está a -8 Km, ¿en qué dirección está ubicado B respecto de O y a qué distancia? Al sur, a 8 km

3

Notas: Todas las actividades desarrolladas en esta clase deben relacionarse con el juego. Los estudiantes deben formular sus propias conclusiones y discutirlas

En la recta numérica siempre se omite la flecha que señala la izquierda. Ver gráfica.

1. Expresar la altura con signo positivo y la profundidad con signo negativo. [A3]

* Observar el dibujo y lo comenten tomando en cuenta el signo positivo y negativo.

M: ¿Cómo se expresa la altura de la montaña de Celaque?

RP: +2827 m.

M: ¿Cómo puede expresarse la depresión (profundidad) del desierto de Colorado?

RP: -610 m.

* Concluir que se toma el nivel del mar como punto de referencia para expresar un número con signo positivo o negativo.

* Sugerir a los estudiantes que ejemplifiquen situaciones don de utilizan los números positivos y negativos.

RP: En mi casa hay un pozo de 5 m de profundidad. Hoy miré una antena como de +20 m de altura.

2. Resolver 2 .

3. Expresar la posición y/o el movimiento con números negativos o positivos. [A4]

* Explicar el diagrama resaltando el punto de referencia, el Este y el Oeste.

* A través de un juego en el aula los estudiantes ubicarán el punto de referencia en el centro del aula y marcarán los cuatro puntos cardinales. Los estudiantes se ubicarán de acuerdo al número positivo o negativo que el maestro diga ya sea como posición o movimiento. La competencia se hará en parejas, primero con la dirección este-oeste y después la norte-sur. Las reglas del juego pueden cambiar en función del objetivo de la clase.

4. Resolver 3 y 4 .

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

5. Expresar con números positivos o negativos los movimientos. [A5]

M: Según el dibujo. ¿Cómo se expresa 3 Km de movimiento hacia el Oeste?

RP: -3 Km.

* Concluir que la dirección del movimiento es positiva si es hacia el este y negativa si es hacia el Oeste.

6. Resolver 5.

[Hasta aquí 2/11]

[Desde aquí 3/11]

1. Expresar con números positivos o negativos el tiempo antes o después de ahora. [A6]

* Pídales que observen los dibujos de los relojes y los comenten.

* Aprovechando los comentarios hacer referencia a los tres momentos y la posición de las agujas.

M: Si se expresa con +15 minutos el momento 15 minutos después de ahora ¿cómo se expresa el momento 20 minutos antes de ahora?

RP: -20 minutos.

* Indicar que se puede expresar el tiempo con números positivos y negativos utilizando el ahora como punto de referencia.

2. Resolver 6.

3. Expresar la ganancia con signo positivo y la pérdida con signo negativo. [A7]

M: Si 600 Lempiras de ganancia se expresa con +600. ¿Cómo se expresa 300 Lempiras de pérdida?

RP: -300 Lempiras.

Lección 1: (2/11)

Números positivos y negativos

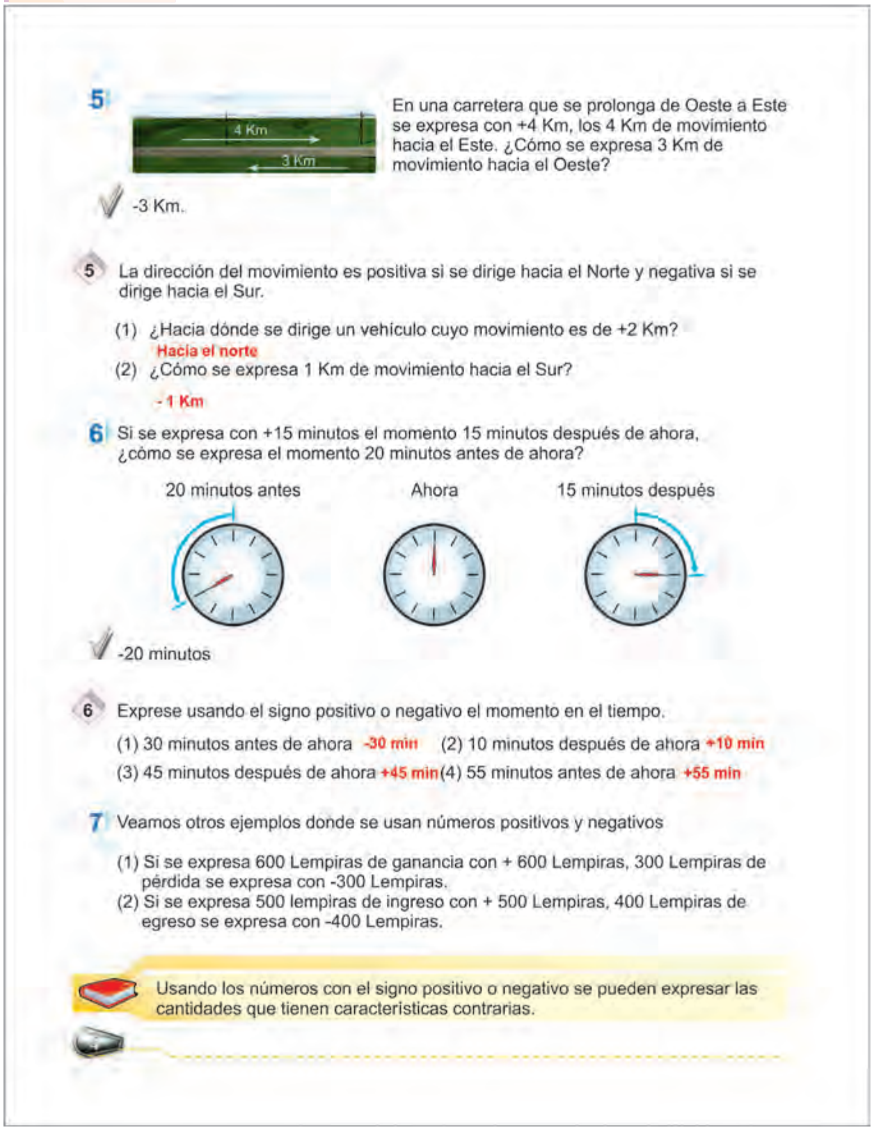
Objetivo: (3/11)

• Expresar el cambio en la cantidad con números positivos o negativos en relación al tiempo antes o después de ahora y el tiempo de transcurso al pasado o al futuro.

Materiales:

(M) Lámina con la ilustración de carreteras que estén ubicadas de Este a Oeste y de Norte a Sur.

(M) Reloj de cartón o uno de pared.



5 En una carretera que se prolonga de Oeste a Este se expresa con +4 Km, los 4 Km de movimiento hacia el Este. ¿Cómo se expresa 3 Km de movimiento hacia el Oeste?

-3 Km.

5 La dirección del movimiento es positiva si se dirige hacia el Norte y negativa si se dirige hacia el Sur.

(1) ¿Hacia dónde se dirige un vehículo cuyo movimiento es de +2 Km? Hacia el norte

(2) ¿Cómo se expresa 1 Km de movimiento hacia el Sur? - 1 Km

6 Si se expresa con +15 minutos el momento 15 minutos después de ahora, ¿cómo se expresa el momento 20 minutos antes de ahora?

20 minutos antes — Ahora — 15 minutos después

-20 minutos

6 Exprese usando el signo positivo o negativo el momento en el tiempo.

(1) 30 minutos antes de ahora -30 min (2) 10 minutos después de ahora +10 min

(3) 45 minutos después de ahora +45 min (4) 55 minutos antes de ahora +55 min

7 Veamos otros ejemplos donde se usan números positivos y negativos

(1) Si se expresa 600 Lempiras de ganancia con + 600 Lempiras, 300 Lempiras de pérdida se expresa con -300 Lempiras.

(2) Si se expresa 500 lempiras de ingreso con + 500 Lempiras, 400 Lempiras de egreso se expresa con -400 Lempiras.

Usando los números con el signo positivo o negativo se pueden expresar las cantidades que tienen características contrarias.

* Concluir que la ganancia se expresa con signo positivo y la pérdida con signo negativo.

* Explicar que con el signo positivo o negativo se puede expresar la posición relativa con respecto al punto de referencia.

Lección 1: (4/11)

Números positivos y negativos

Objetivo: • Definir el conjunto de los números naturales (N) y el conjunto de los números enteros (Z).

Materiales:

Vamos a expresar números menores que cero.

8 Si se expresa como +5 el número que es 5 mayor que cero tomando cero como punto de referencia. ¿Cómo se expresa el número que es 5 menor que cero?

✓ Como -5.

Números positivos son los números que son mayores que cero.
Números negativos son los números que son menores que cero.
El cero no es positivo ni negativo.

7 Exprese los siguientes números con el signo positivo o negativo.

(1) El número 4 menor que cero **-4** (2) El número 7 mayor que cero **+7**

(3) El número 8 mayor que cero **+8** (4) El número 2 menor que cero **-2**

El conjunto de los **números naturales** se representa por la letra "N" y consiste en los números que sirven para contar. N = {+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10, +11, +12, ...}

El conjunto de los **números enteros** se representa por la letra "Z" y consiste en los enteros positivos (números positivos) el número cero 0 y los enteros negativos (números negativos)

Números enteros positivos: +1, +2, +3, +4
Número cero: 0
Números enteros negativos: -1, -2, -3, -4

Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...}

A partir de ahora cuando se hable de números enteros se entenderá que están incluidos los números positivos, los números negativos y el cero.

9 Los números +1, +2, +3, +4, ... ¿son naturales o enteros?

✓ Son números naturales y a la vez son números enteros.

Los números -1, -2, -3, -4, ... ¿son naturales o enteros?

✓ Son números enteros pero no son números naturales.

Los números naturales son números enteros pero no todos los números enteros son números naturales.
El conjunto de los números naturales están contenidos en el conjunto de los enteros, se escribe $N \subset Z$.

1. Expresar como negativos los números menores que cero. [A8]

M: ¿Cómo hemos expresado las temperaturas bajo cero grado (los egresos con Lempiras, las cantidades bajo el nivel del mar, el tiempo antes de ahora)?

RP: Con el signo menos, con el signo negativo.

M: Si se expresa como +5 el número que es 5 mayor que el cero tomando el cero como punto de referencia. ¿Cómo se puede expresar el número que es 5 menor que cero?

RP: Como -5.

* Indicar que un número menor que cero se expresa con el signo menos.

2. Llamar números negativos y positivos.

M: ¿Cómo se llaman los números que son mayores (menores) que cero?

RP: Números positivos (negativos).

* Indicar que el cero no es positivo ni negativo y que se utiliza como punto de referencia entre éstos.

3. Resolver 7.

4. Definir los números naturales.

* Indicar que a los números que sirven para contar se les llama números Naturales.

* Indicar que este conjunto se representa con la letra N.

* Indicar que el conjunto de los naturales no incluye el cero.

5. Definir los números enteros.

* Indicar que la unión de los números enteros positivos, el cero y los números enteros negativos forman el conjunto de los números enteros.

* Indicar que este conjunto se representa con la letra Z.

6. Concluir que todo número Natural es Entero. [A9]

M: Los números 1, 2, 3, … ¿son Naturales o Enteros?

RP: Son naturales y son enteros.

M: Los números -1, -2, -3, … ¿son Naturales o Enteros?

RP: Son enteros pero no son Naturales.

* Concluir que todo número Natural es Entero pero no al revés.

* Concluir que los números Naturales están contenidos en los números Enteros.

1. **Definir los números racionales.**

* Indicar que la unión de las fracciones positivas, el cero y las fracciones negativas (formadas por el signo menos y una fracción) forman el conjunto de los números racionales.

* Indicar que este conjunto se representa con la letra Q.

2. **Concluir que todo número entero es racional. [A10 y 11]**

M: Los números 1, -1, 2, -2, 3, -3, … ¿son enteros o racionales?

RP: Son enteros y racionales.

* Indicar que todo número entero se puede expresar como racional.

M: Los números $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{3}$, $-\frac{4}{2}$, … ¿son enteros o racionales?

RP: Los números $-\frac{1}{4}$ y $-\frac{2}{3}$ son racionales y los números $-\frac{3}{3} = -1$ y $-\frac{4}{2} = -2$ son racionales y a la vez enteros.

* Concluir que todo número entero es racional.

* Concluir que no todo número racional es entero.

* Concluir que el conjunto de los números enteros están contenidos en el de los números racionales.

3. **Definir los números decimales.**

M: ¿Cómo puede expresarse 2.4 como una fracción?

RP: Como 2.4 significa 24 décimas $2.4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$.

* Dar a conocer que éste LE se utiliza fracción impropia en vez de fracción mixta.

* Concluir que los números racionales cuyos denominadores son potencias de 10 son números decimales.

Lección 1: (5/11) Números positivos y negativos

Objetivo: • Definir el conjunto de los números racionales (Q).

Materiales:

El conjunto de los números racionales se representa por la letra "**Q**" y consiste en los números que se escriben de la forma racional, es decir, en la forma $\frac{\triangle}{\square}$ donde △ es número entero y □ es un numero natural.

10 Los números +1, -1, +2, -2, +3, -3, … ¿son enteros o racionales?

Son números enteros y a la vez son números racionales.

Todo número entero se puede escribir como una fracción ($3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} =$ ....,
$-2 = -\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} = \ldots$).

El conjunto de los números enteros están contenidos en el conjunto de los números racionales, es decir, $Z \subset Q$.

11 Los números $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{3}$ y $-\frac{4}{2}$ ¿son enteros o racionales?

Los números $-\frac{1}{4}$ y $-\frac{2}{3}$ son racionales y los números $-\frac{3}{3} = -1$ y $-\frac{4}{2} = -2$ son racionales y a la vez enteros.

Los números enteros son números racionales pero no todos los números racionales son números enteros.

Como todo número decimal se puede expresar en la forma racional $\left(2.4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}, -0.35 = -\frac{35}{100} = -\frac{7}{20}\right)$ un número decimal positivo o negativo es también un número racional.

Notas

$\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$, pero en este LE vamos a usar las fracciones impropias en lugar de las fracciones mixtas.

Números decimales son aquellos números racionales cuyos denominadores son potencias de 10.

A los números decimales también se les llama fracciones decimales y más popularmente decimales.

Como $N \subset Z$ y $Z \subset Q$ entonces $N \subset Q$. De esto se deduce que $N \subset Z \subset Q$.

* Concluir que como todo número decimal se puede escribir como un número racional, los números decimales son números racionales.

4. **Concluir que $N \subset Z \subset Q$.**

M: Si $N \subset Z$ y $Z \subset Q$, ¿qué relación se establece entre N y Q?, ¿y entre N, Z y Q?

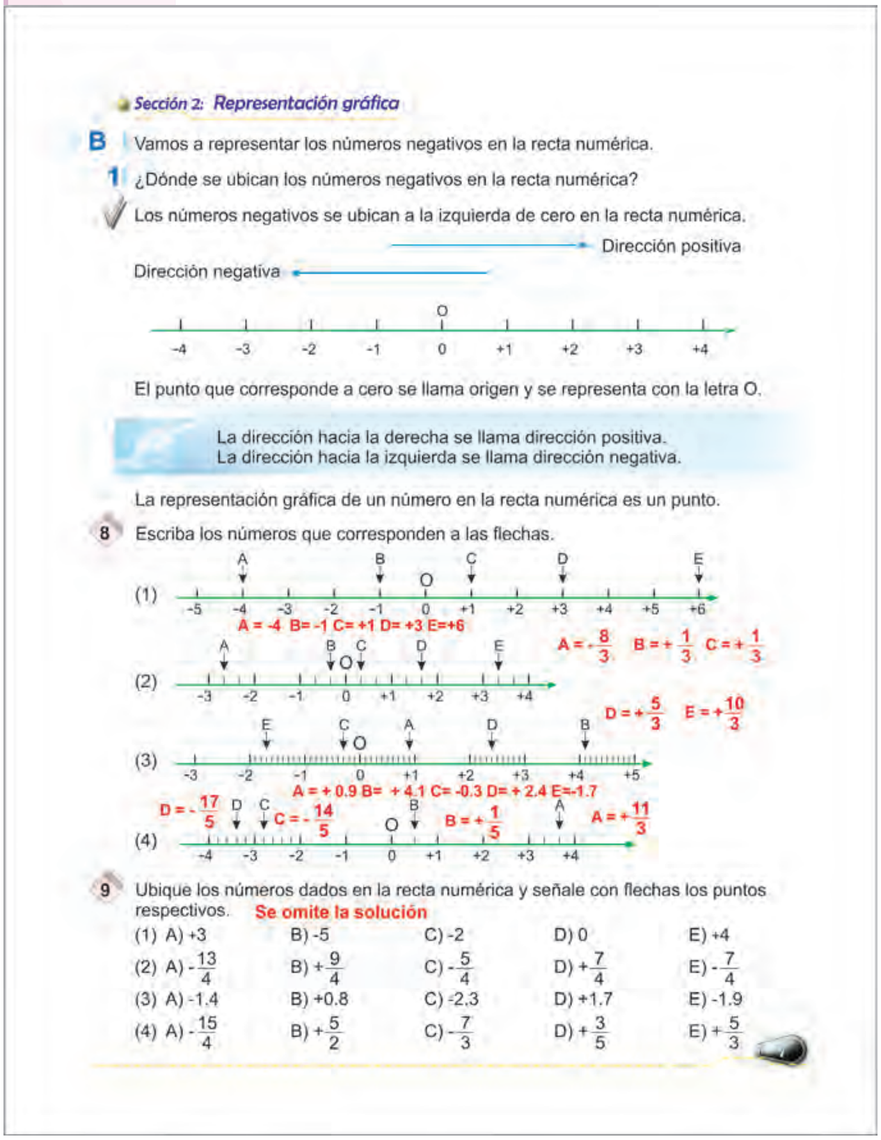
RP: Que $N \subset Q$ y que $N \subset Z \subset Q$.

* Explicar estas relaciones con ejemplos numéricos.

Lección 1: (6~7/11) Números positivos y negativos

Objetivo: • Representar números positivos y negativos en la recta numérica.

Materiales: (M) Recta numérica. (N) LE, regla graduada en cm.


Sección 2: Representación gráfica

B Vamos a representar los números negativos en la recta numérica.

1 ¿Dónde se ubican los números negativos en la recta numérica?

Los números negativos se ubican a la izquierda de cero en la recta numérica.

Dirección positiva

Dirección negativa

O

-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

El punto que corresponde a cero se llama origen y se representa con la letra O.

La dirección hacia la derecha se llama dirección positiva.
La dirección hacia la izquierda se llama dirección negativa.

La representación gráfica de un número en la recta numérica es un punto.

8 Escriba los números que corresponden a las flechas.

(1) A = -4 B= -1 C= +1 D= +3 E=+6

(2) $A = -\frac{8}{3}$ $B = +\frac{1}{3}$ $C = +\frac{1}{3}$ $D = +\frac{5}{3}$ $E = +\frac{10}{3}$

(3) A = + 0.9 B= + 4.1 C= -0.3 D= + 2.4 E=-1.7

(4) $D = -\frac{17}{5}$ $C = -\frac{14}{5}$ $B = +\frac{1}{5}$ $A = +\frac{11}{3}$

9 Ubique los números dados en la recta numérica y señale con flechas los puntos respectivos. Se omite la solución

	A)	B)	C)	D)	E)
(1)	+3	-5	-2	0	+4
(2)	$-\frac{13}{4}$	$+\frac{9}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$+\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$
(3)	-1.4	+0.8	-2.3	+1.7	-1.9
(4)	$-\frac{15}{4}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{3}$	$+\frac{3}{5}$	$+\frac{5}{3}$

1. Representar en la recta numérica los números negativos. [B1]

* Indicarles que dibujen una recta numérica y que ubiquen los números naturales y el cero.
* Cerciorarse que los segmentos sean de la misma longitud, por ejemplo 1 cm.

M: ¿Dónde ubicamos los números naturales (positivos) en la recta numérica?

RP: A la derecha del número cero.

M: ¿Dónde ubicamos los números negativos en la recta numérica?

PR: A la izquierda del número cero.

* Indicar que extiendan la recta numérica a la izquierda y que hagan las respectivas divisiones igual que se hizo con los números positivos.
* Indicar en la recta numérica la dirección positiva y la dirección negativa.

M: ¿Cómo se ubican los números negativos en la recta numérica?

* Indicar que en la primera división a la izquierda de 0 se ubica -1, en la segunda se ubica -2 y así sucesivamente.

M: En la recta numérica ¿qué número se encuentra entre los enteros positivos y los negativos?

RP: El número cero.

* Indicar que al punto que corresponde el número cero se le llama origen y se representa con la letra O. Además se toma como un punto de referencia en la recta numérica.

2. Representar en la recta numérica números positivos y negativos.

* Indicar que la representación gráfica de un número en la recta numérica es un punto.
* Pídales que representen gráficamente los números +4, -2, -3.5, $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{4}{3}$.

3. Resolver 8 y 9.

1. Establecer la relación de orden entre dos números. [C1]

* Indicar que ubiquen en la recta numérica los números +3 y +5.

M: En la recta numérica ¿cuál número está más a la derecha +3 ó +5?, ¿cuál es el mayor?

RP: El +5 está más a la derecha. El +5 es el mayor.

* Indicar que expresen esta relación como +5 > +3.

* Concluir que de dos números positivos es mayor el que se encuentra más a la derecha en la recta numérica.

M: En la recta numérica ¿cuál número está más a la derecha +4 ó -2?, ¿cuál es el mayor?

RP: El +4 está más a la derecha. El +4 es el mayor.

* Concluir que de dos números es mayor el que se encuentra más a la derecha en la recta numérica ya sea que éstos sean positivos y/o negativos.

* Tener mucho cuidado al comparar los números decimales (expresados hasta décimas) y racionales (con denominadores pequeños).

2. Expresar una relación mayor que como una relación menor que.

M: ¿Cómo puede expresarse +5 > +3 como una relación menor que?

RP: Como +3 < +5.

* Concluir que toda relación mayor que puede expresarse como una relación menor que y viceversa.

* Concluir que de dos números (positivos y/o negativos) es menor el que se encuentra más a la izquierda en la recta numérica.

3. Resolver 10 .

Lección 1: (8~9/11) Números positivos y negativos

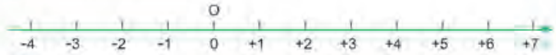
Objetivo: • Comparar dos números y establecer la relación de orden entre ellos.

Materiales: M) Recta numérica. (N) LE, regla graduada en cm.

Sección 3: Relación de orden

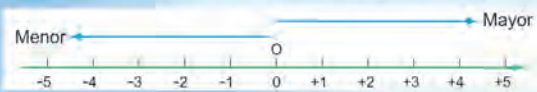
C Pensemos en la dimensión de los números y su posición en la recta numérica.

1 En la recta numérica, ¿cuál número está más a la derecha +3 ó +5? ¿Cuál de ellos es el mayor?



El +5 está más a la derecha. El mayor es +5.

Cuando se ubican los números positivos en la recta numérica es mayor el que está ubicado más a la derecha. Esta relación es aplicable a toda la recta numérica.
En la recta numérica el número que está más a la derecha es mayor.



La relación +5 mayor que +3 se escribe +5 > +3.

Si +5 es mayor que +3 se da que +3 es menor que +5 y se escribe +3 < +5.
Si -2 es menor que +4 se da que +4 es mayor que -2 y se escribe +4 > -2.

10 Exprese la relación de dimensión de los números (escribir signo < ó >) de cada una de las siguientes parejas.

(1) +3 < +8	(2) +9 > +4	(3) +5 > 0	(4) 0 < +2
(5) +4 > -2	(6) -5 < +3	(7) 0 > -6	(8) -8 < 0
(9) -2 < -1	(10) -3 > -9	(11) -8 > -9	(12) -5 < -2
(13) -15 > -20	(14) -30 < -14	(15) -24 > -36	(16) -62 < 0
(17) $+\frac{1}{2} < +\frac{5}{2}$	(18) $+\frac{5}{4} < +\frac{7}{3}$	(19) $-\frac{1}{2} > -\frac{5}{3}$	(20) $-\frac{5}{4} > -\frac{7}{3}$
(21) $+\frac{3}{4} > 0$	(22) $0 > -\frac{8}{5}$	(23) $-\frac{7}{6} < 0$	(24) $-\frac{1}{2} < 0$

* Apoye a los estudiantes especialmente en aquellas parejas de números racionales, ya que tienden a confundirse. Por ejemplo al comparar $+\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{3}$ establecen la relación $+\frac{1}{3} > +\frac{1}{2}$ que es errónea, por eso sugiérales que utilicen la recta numérica.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (8~9/11)

Números positivos y negativos

[Continuación]

Objetivo: (10/11)
- Encontrar el valor absoluto de un número y asociarlo a la relación de orden.

Materiales: (M) Recta numérica. (N) LE, regla graduada en cm.

(25) $-\frac{1}{2}$ < $+\frac{1}{2}$ (26) -2 > $-\frac{4}{3}$ (27) $+\frac{7}{5}$ > $-\frac{4}{5}$ (28) $-\frac{3}{8}$ < $+\frac{4}{8}$

(29) $-\frac{3}{5}$ < $+2$ (30) $+4$ > $-\frac{2}{3}$ (31) -3 > $-\frac{11}{3}$ (32) -1 < $-\frac{3}{4}$

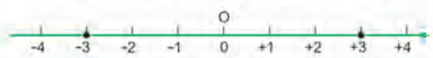
(33) -3.4 < +3.4 (34) +4.2 > -4.3 (35) - 4.5 < - 6.8 (36) -2.1 > -2.6

(37) 0 < +4.2 (38) 0 > -3.7 (39) +3.24 > 0 (40) -0.38 < 0

(41) + 0.7 < $+\frac{4}{3}$ (42) - 0.7 < -1

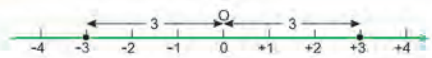
Sección 4: Valor absoluto

D1 ¿Cuál número está más lejos de 0 en la recta numérica +3 ó -3?



A igual distancia.

La distancia entre un número y el 0 en la recta numérica se llama **valor absoluto** de este número. El valor absoluto de un número se indica colocando el número entre dos barras.



El valor absoluto de +3 es 3 y se representa como l+3l = 3

El valor absoluto de -3 es 3 y se representa como l-3l = 3

El valor absoluto de 0 es 0 y se representa como l0l = 0

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto.
Ejemplo: l-24l = l24l = 24.

11 Escriba el valor absoluto de los siguientes números.

(1) +8 8 (2) -5 5 (3) $-\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

(4) +1.5 1.5 (5) $-\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$ (6) -23.71 23.71

.. viene de la página anterior.

[Hasta aquí 8~9/11]

[Desde aquí 10/11]

1. Encontrar la distancia entre un número y cero en la recta numérica. [D1]

M: ¿Cuál está más lejos de 0 en la recta numérica +3 ó -3?

RP: Están a igual distancia.

2. Llamar valor absoluto a la distancia en la recta numérica entre 0 y un número.

M: En la recta numérica ¿cuál es la distancia entre 0 y +3? ¿y entre 0 y -3?

RP: Es 3.

* Indicar que se llama valor absoluto de un número a la distancia en la recta numérica entre 0 y el número.

* Indicar que se utilizan dos barras para indicar el valor absoluto.

* Concluir que +3 y -3 tienen el mismo valor absoluto, es decir l+3l = l-3l = 3

3. Resolver 11.

1. **Comparar el orden (dimensión) de dos números y su valor absoluto. [D2]**

* Presentar la tabla en la pizarra para que los estudiantes la llenen con la relación de orden tanto para los números como para sus valores absolutos.
* Pedir a los estudiantes que saquen sus propias conclusiones conforme a la tabla.
* Comparar las conclusiones con las presentadas en el LE.
* Es importante que los estudiantes se den cuenta que en la recta numérica el valor absoluto se incrementa cuando el número se aleja de cero ya sea hacia la izquierda o hacia la derecha.

2. **Resolver 12 .**

* Utilizar la recta numérica para comprobar el orden de las parejas de números.
* Si un estudiante termina antes que los demás revísele el trabajo y dele otros ejercicios, o pídale que le ayude como tutor a otros compañeros que presentan dificultades. Si no terminan todos los ejercicios déjelos como tarea y revíselos en la siguiente clase.
* Ordenar una lista de 3 o más números (utilizar la recta numérica).

Lección 1: (11/11)

Números positivos y negativos

Objetivo: • Comparar dos números utilizando el valor absoluto.

Materiales:

Ahora veamos la relación de orden entre los números y su valor absoluto.

2 Compare el orden de los dos números de cada una de las siguientes parejas. Asimismo compare sus valores absolutos.

Relación de orden \ Pareja	+2 y +5	-2 y +5	-5 y +2	-5 y -2
Sin valor absoluto	+2 < +5	-2 < +5	-5 < +2	-5 < -2
Con valor absoluto	|+2| < |+5|	|-2| < |+5|	|-5| > |+2|	|-5| > |-2|

Con base a la tabla anterior y lo que vimos en la sección 1 concluimos la siguiente relación de orden:

Relación de orden

1. Los números positivos son mayores que el cero.
2. Los números negativos son menores que el cero.
3. Entre los números positivos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
4. Entre los números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto.
5. Entre un número positivo y un negativo, es mayor el positivo y es menor el negativo.

12 Exprese la relación de orden de los números de cada una de las siguientes parejas.

(1) $+8 \underline{\ >\ } +3$ (2) $-5 \underline{\ <\ } +10$ (3) $-15 \underline{\ <\ } -8$ (4) $+9 \underline{\ >\ } -6$

(5) $-7 \underline{\ >\ } -10$ (6) $-\frac{1}{2} \underline{\ <\ } -\frac{1}{8}$ (7) $-\frac{3}{4} \underline{\ <\ } +\frac{2}{5}$ (8) $+\frac{3}{5} \underline{\ >\ } -\frac{1}{2}$

(9) $-\frac{3}{8} \underline{\ >\ } -\frac{5}{4}$ (10) $-\frac{5}{2} \underline{\ <\ } -\frac{1}{3}$ (11) $+1.3 \underline{\ >\ } 0$ (12) $+5.8 \underline{\ <\ } +7.2$

(13) $-2.4 \underline{\ <\ } +3.8$ (14) $+6.3 \underline{\ >\ } -7.5$ (15) $-2.9 \underline{\ <\ } 0$ (16) $0 \underline{\ >\ } -3.2$

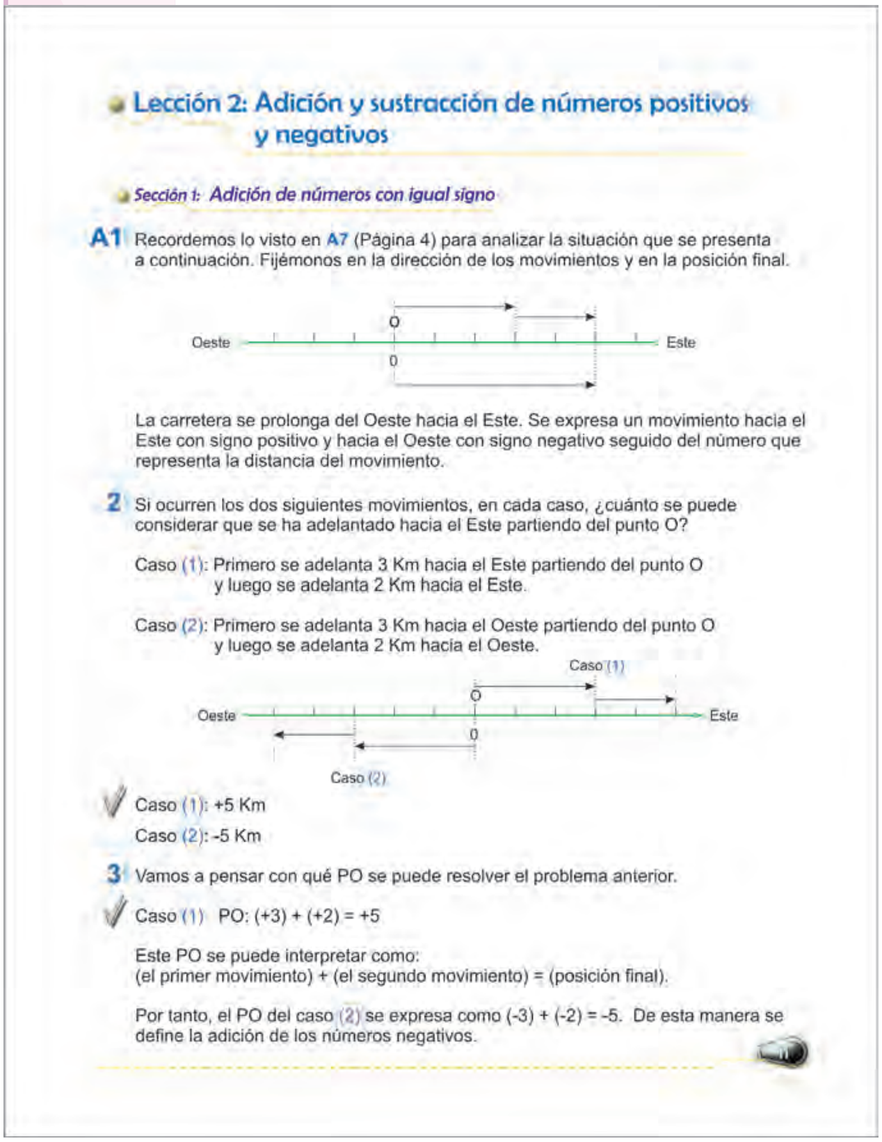
(17) $-2.8 \underline{\ <\ } -2.7$ (18) $-4.3 \underline{\ >\ } -4.6$ (19) $-6.2 \underline{\ >\ } -7.4$ (20) $-3.1 \underline{\ <\ } -2.8$

Lección 2: (1/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo:
- Comprender el sentido de la suma de dos números con el mismo signo en la recta numérica.
- Sumar dos números con el mismo signo.

Materiales: (M) Un automóvil de cartón, masking, lámina de la recta numérica y los movimientos.



Lección 2: Adición y sustracción de números positivos y negativos

Sección 1: Adición de números con igual signo

A1 Recordemos lo visto en A7 (Página 4) para analizar la situación que se presenta a continuación. Fijémonos en la dirección de los movimientos y en la posición final.

La carretera se prolonga del Oeste hacia el Este. Se expresa un movimiento hacia el Este con signo positivo y hacia el Oeste con signo negativo seguido del número que representa la distancia del movimiento.

2 Si ocurren los dos siguientes movimientos, en cada caso, ¿cuánto se puede considerar que se ha adelantado hacia el Este partiendo del punto O?

Caso (1): Primero se adelanta 3 Km hacia el Este partiendo del punto O y luego se adelanta 2 Km hacia el Este.

Caso (2): Primero se adelanta 3 Km hacia el Oeste partiendo del punto O y luego se adelanta 2 Km hacia el Oeste.

Caso (1): +5 Km
Caso (2): -5 Km

3 Vamos a pensar con qué PO se puede resolver el problema anterior.

Caso (1) PO: (+3) + (+2) = +5

Este PO se puede interpretar como:
(el primer movimiento) + (el segundo movimiento) = (posición final).

Por tanto, el PO del caso (2) se expresa como (-3) + (-2) = -5. De esta manera se define la adición de los números negativos.

1. **Presentar la situación de un automóvil cuyos movimientos se ilustran en la gráfica. [A1].**

M. ¿Qué dirección tienen los dos movimientos pequeños?

RP: Al Este.

M. ¿En cuál dirección quedó estacionado el auto?

RP: Hacia el Este.

M. ¿Cuál flecha ilustra esta última situación?

RP: La de abajo.

* Indicar que un movimiento hacia el Este se expresa con signo positivo (dirección positiva) y hacia el Oeste con signo negativo (dirección negativa).

2. **Analizar la situación. [A2].**

M: El auto está en el punto de partida O.

Avancemos al este (caso 1). ¿Cuántos Km avanza hasta la primera estación?

RP: 3 Km.

* Indicar que cuenten los segmentos en la recta numérica.

M: ¿Cuántos Km más avanza para llegar a la posición final?

RP: 2 Km.

M: ¿Cuál es la distancia recorrida y en cuál dirección quedó estacionado el auto?

RP: 5 Km al Este del punto O.

M: ¿Con cuál de las operaciones ilustramos estos movimientos y por qué?

RP: Con la suma, con la adición. Porque unimos los dos movimientos.

* Continuar con el caso 2.

M: ¿A qué número llegó?

RP: A - 5

* Preguntar por la posición final (número) en lugar de la distancia.

3. **Conocer el PO. [A3]**

M: ¿Cuál será el PO?

RP: (+3) + (+2) = +5

M: ¿Por qué +3, +2 y +5 son positivos?

RP: Porque son movimientos hacia el Este.

4. **Hacer el mismo análisis con el caso (2).**

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

5. Resolver 1.

6. Confirmar el proceso para sumar dos números que tienen el mismo signo.

7. Resolver 2.

* Puede reforzar los procedimientos para sumar decimales y fracciones.

* Hacer entender que si se suma el O, no cambia el valor.

[Hasta aquí 1/7]

[Desde aquí 2/7]

1. Analizar la situación de manera similar a la clase anterior Caso (1). [B1]

M: ¿Cuál es el PO que representa el movimiento (1)?

RP: (-3) + (+5).

M: Encuentre la respuesta con la recta numérica.

* Hacer entender que el punto final del primer movimiento es el punto inicial del segundo movimiento.

RP: 2 Km.

M: ¿En qué dirección se quedó del punto O?

RP: Al Oeste.

2. Hacer lo mismo con (2).

3. Analizar la manera de realizar el cálculo.

4. Resolver 3.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (1/7) Adición y sustracción de números positivos y negativos

[Continuación]

Objetivo: (2/7)
- Comprender el sentido de la suma de dos números con diferente signo en la recta numérica.
- Sumar dos números con diferente signo.

Materiales: (M) Un automóvil de cartón, masking, lámina con la ilustración de (B1).

1 Calcule lo siguiente usando la gráfica anterior.

(1) (+1) + (+3) **+4** (2) (-1) + (-3) **-4**

Para sumar dos números que tienen el mismo signo se coloca el signo que es común a los dos números acompañado por la suma de sus valores absolutos.
(pos) + (pos) = (pos) (neg) + (neg) = (neg)

2 Calcule lo siguiente.

(1) (+9) + (+7) **+16** (2) (-8) + (-4) **-12** (3) (-24) + (-9) **-33**

(4) (+3) + (+25) **+28** (5) (+1.3) + (+2.8) **4.1** (6) $\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)$ **+4**

(7) (-5.5) + (-3.4) **-8.9** (8) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)$ **$-\frac{5}{3}$** (9) (-0.56) + (-3.4) **-3.96**

(10) (0) + (+4) **+4** (11) (-3) + (0) **-3** (12) (+2) + (0) **+2**

Sección 2: Adición de números con diferente signo

Aplicaremos la interpretación de la adición de la sección anterior a dos números con diferente signo.

B1 ¿Dónde está la posición final después de los dos movimientos?

Caso (1): Primero se avanza 3 Km hacia el Oeste partiendo del punto O y luego se avanza 5 Km hacia el Este.

Caso (2): Primero se avanza 3 Km hacia el Este partiendo del punto O y luego se avanza 5 Km hacia el Oeste.



Caso (1): (-3) + (+5) = +2

Caso (2): (+3) + (-5) = -2

3 Calcule lo siguiente usando la gráfica anterior.

(1) (-2) + (+6) **+4** (2) (-4) + (+1) **-3** (3) (+5) + (-3) **+2**

(4) (+3) + (-5) **-2** (5) (+3) + (-3) **0** (6) (-4) + (+4) **0**

Notas: Hacer combinaciones con números enteros, racionales y decimales.

Lección 2: (2/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

[Continuación]

Para sumar dos números que tienen diferente signo se escribe el signo del número que tiene mayor valor absoluto seguido de la resta del valor absoluto mayor menos el valor absoluto menor.

Si los valores absolutos son iguales la suma es cero.

4 Calcule.

(1) (-7) + (+6) **-1** (2) (+12) + (-20) **-8** (3) (+15) + (-8) **+7**

(4) (-9) + (+24) **+15** (5) (+32) + (-45) **-13** (6) (-18) + (+11) **-7**

(7) (+20) + (-20) **0** (8) (-15) + (+10) **-5** (9) (+7) + (-23) **-16**

2 Calcule: (1) $\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)$ (2) -2.24 + (+2.183)

(1) $\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)=\left(+\frac{20}{24}\right)+\left(-\frac{21}{24}\right)$ .... Igualando los denominadores

$=-\left(\frac{21}{24}-\frac{20}{24}\right)$

$=-\frac{1}{24}$ .... Porque $\frac{20}{24}<\frac{21}{24}$

(2) (-2.24) + (+2.183) = -(2.24 - 2.183)

= -0.057

5 Opere.

(1) $\left(+\frac{7}{4}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)$ $+\frac{25}{12}$ (2) $\left(+\frac{19}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$ $+\frac{21}{3}$ (3) $\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$ $-\frac{1}{12}$

(4) $\left(+\frac{11}{12}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)$ $+\frac{13}{24}$ (5) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$ $-\frac{1}{3}$ (6) $\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{3}{10}\right)$ $-\frac{3}{40}$

(7) $\left(+\frac{13}{6}\right)+\left(-\frac{5}{9}\right)$ $+\frac{29}{18}$ (8) $\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{8}{5}\right)$ $+\frac{1}{10}$ (9) $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{5}{14}\right)$ $+\frac{3}{28}$

(10) (-6.8) + (+6.8) **0** (11) (+1.3) + (-2.8) **- 1.5** (12) (-4.15) + (+7.19) **+ 3.04**

(13) (-8.23) + (+24.5) **+16.27** (14) (+12.6) + (-30) **- 17.4** (15) (-7) + (+2.63) **- 4.37**

13

... viene de la página anterior.

5. **Confirmar el proceso para sumar dos números con diferente signo.**

6. **Resolver 4 .**

7. **Sumar números racionales con distinto signo. [B2]**

* Desarrollar este ejercicio en forma similar a los anteriores.

8. **Resolver 5 .**

* Señalar que para sumar dos números que tienen diferente signo se escribe el signo del número que tiene mayor valor absoluto seguido de la resta del valor absoluto mayor, menos el valor absoluto menor.

Lección 2: (3/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo: • Sumar números positivos y negativos aplicando la propiedad conmutativa y asociativa.

Materiales:

1. Sumar dos números con igual o diferente signo cambiando el orden de los sumandos. [C1 (1)]

M: ¿Cuánto es (-4) + (+7)?

RP: +3

M: ¿Cuánto es (+7) + (-4)?

RP: +3

M: ¿Cómo son estos resultados?

RP: Iguales.

M: Ahora sumen y comparen: (-5) + (-3); (-3) + (-5), ¿cómo son los resultados?

RP: Son iguales.

M: ¿Qué podemos concluir?

RP: Que podemos sumar dos números en cualquier orden y siempre da el mismo resultado.

M: ¿Cómo se llama esta propiedad?

RP: Conmutativa.

2. Sumar tres números con igual o diferente signo cambiando el orden de asociación. [C1 (2)]

* Enseñar que primero se opera lo que está dentro de { }.
* Indicar a dos estudiantes que resuelvan en el pizarrón el PO del LE de las dos formas propuestas y que comparen sus respuestas.
* Concluir a través de preguntas y respuestas que por medio de la propiedad asociativa podemos sumar tres números en diferente orden sin alterar el resultado.

3. Confirmar la validez de las propiedades conmutativa y asociativa con los números positivos y negativos.

4. Resolver el ejemplo. [C2]

* Plantear el ejercicio para que los estudiantes lo resuelvan por sí mismos.

Sección 3: Propiedad conmutativa y asociativa de la adición

C1 Compare el resultado de:

(1) (-4) + (+7) y (+7) + (-4)

(-4) + (+7) = +3 y (+7) + (-4) = +3 .... Son iguales

Con los números positivos y negativos es válida la propiedad siguiente:

Propiedad conmutativa □ + ○ = ○ + □

Notas: Primero se resuelve separar lo que está dentro de las llaves { }.

(2) {(-3) + (-2)} + (+7) y (-3) + {(-2) + (+7)}

{(-3) + (-2)} + (+7) = (-5) + (+7) = +2
y (-3) + {(-2) + (+7)} = (-3) + (+5) = +2 .... Son iguales

Con los números positivos y negativos es válida la propiedad siguiente:

Propiedad asociativa (□ + ○) + △ = □ + (○ + △)

Usando estas propiedades se puede cambiar el orden de las adiciones.

2 Ejemplo

(-4) + (+7) + (+5) + (-3) = (+7) + (-4) + (+5) + (-3) .... Conmutativa (-4) + (+7) = (+7) + (-4)
= (+7) + (+5) + (-4) + (-3) .... Conmutativa (-4) + (+5) = (+5) + (-4)
= {(+7) + (+5)} + {(-4) + (-3)}....... Asociativa
= (+12) + (-7) .... Efectuando la suma
= +5 .... Efectuando la suma

6 Calcule lo siguiente combinando el orden de las adiciones.

(1) (+3) + (-8) + (+2) + (-1) **-4**

(2) (-3) + (+7) + (-2) + (+8) **+10**

(3) (-1.3) + (+5.8) + (-4.2) + (+3.9) **+4.2**

(4) (+4.5) + (-3.2) + (+5.6) + (-9.4) **-2.5**

(5) $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)$ $+\frac{3}{2}$

(6) $\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)$ $-\frac{9}{10}$

19

* Inducir a los alumnos que asocien primero los dos números positivos y después los dos negativos (aplicación de las propiedades conmutativa y asociativa).
* Concluir que por medio de la propiedad asociativa podemos sumar tres o más números en diferente orden sin alterar el resultado.

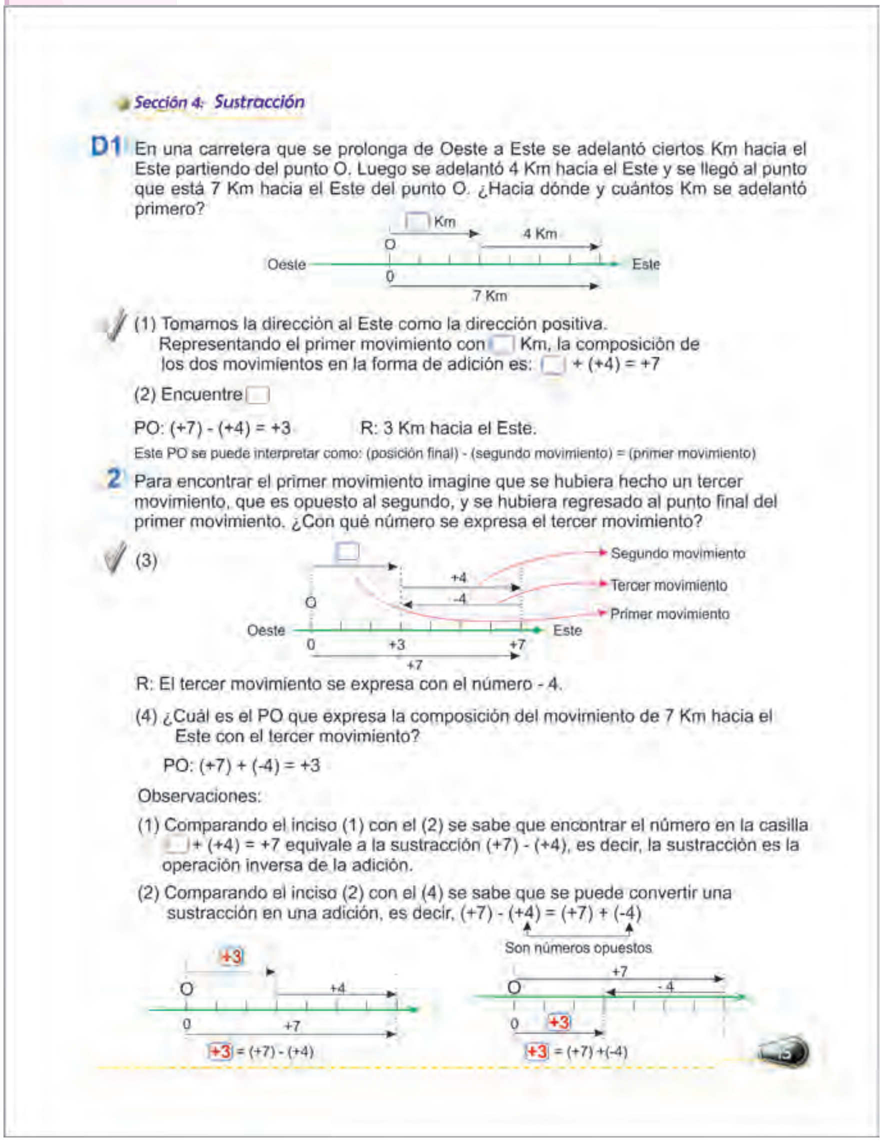
5. Resolver 6.

Lección 2: (4/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo: • Comprender el sentido de la sustracción de números en la recta numérica.

Materiales:



Sección 4: Sustracción

D1 En una carretera que se prolonga de Oeste a Este se adelantó ciertos Km hacia el Este partiendo del punto O. Luego se adelantó 4 Km hacia el Este y se llegó al punto que está 7 Km hacia el Este del punto O. ¿Hacia dónde y cuántos Km se adelantó primero?

(1) Tomamos la dirección al Este como la dirección positiva. Representando el primer movimiento con □ Km, la composición de los dos movimientos en la forma de adición es: □ + (+4) = +7

(2) Encuentre □

PO: (+7) - (+4) = +3 R: 3 Km hacia el Este.

Este PO se puede interpretar como: (posición final) - (segundo movimiento) = (primer movimiento)

2 Para encontrar el primer movimiento imagine que se hubiera hecho un tercer movimiento, que es opuesto al segundo, y se hubiera regresado al punto final del primer movimiento. ¿Con qué número se expresa el tercer movimiento?

(3)

R: El tercer movimiento se expresa con el número - 4.

(4) ¿Cuál es el PO que expresa la composición del movimiento de 7 Km hacia el Este con el tercer movimiento?

PO: (+7) + (-4) = +3

Observaciones:

(1) Comparando el inciso (1) con el (2) se sabe que encontrar el número en la casilla □ + (+4) = +7 equivale a la sustracción (+7) - (+4), es decir, la sustracción es la operación inversa de la adición.

(2) Comparando el inciso (2) con el (4) se sabe que se puede convertir una sustracción en una adición, es decir, (+7) - (+4) = (+7) + (-4)

Son números opuestos

1. **Comentar la situación y captar su sentido. [D1]**

M: ¿Cuántos metros se avanzó al comienzo?

RP: No sabemos.

M: Como no sabemos lo representaremos con □.

M: ¿Cuánto avanzó en el segundo movimiento?

RP: 4 Km.

M: ¿Cuánto avanzó por todo?

RP: 7 Km.

M: ¿Con cuál PO podemos expresar la composición de estos movimientos?

RP: Con la suma, □ + (+4) = +7

M: ¿Cuál es el PO para encontrar □?

RP: □ = (+7) - (+4) = +3

2. **Expresar el tercer movimiento. [D2]**

M: Como no conocemos el primer movimiento, imaginemos un tercer movimiento que es opuesto al segundo y que regresa al final del primer movimiento. ¿Con cuál número podemos expresar este tercer movimiento?

RP: -4

M. ¿Por qué el tercer movimiento se expresa con -4?

RP: Porque va hacia el Oeste.

M. ¿Cuál es el PO que expresa la composición del movimiento de 7 Km hacia el Este con el tercer movimiento?

RP: (+7) + (-4) = +3

3. **Discutir las observaciones.**

* Comparando (1) con (2) concluir que la sustracción es la operación inversa a la adición pues □ + (+4) = +7 equivale a (+7) - (+4). Comparando (2) con (4) concluir que la sustracción se puede convertir en una adición, pues (+7) - (+4) = (+7) + (-4).

1. Expresar una sustracción como una adición. [D3]

M: ¿Con cuál PO podemos encontrar el valor de la casilla en □ + (-3) = +2.

RP: Con la sustracción,
□ = (+2) - (-3).

M: ¿Cómo puede expresarse □ = (+2) - (-3) como una suma?

M: Piensen la manera de encontrar el número que va en la casilla □.

RP: □ = (+2) + (+3)

M: ¿Cuál es el valor de la casilla?

RP: +5, (+2) + (+3) = +5.

M: ¿Qué hicieron para convertir la sustracción en adición?

RP: Pasando el número a sustraer (-3) adicionandolo al otro número conocido (+2).

2. Confirmar la resta de un número.

M: ¿Qué se hace para restar dos números?

RP: Sumarle al primer número el opuesto del segundo.

* Concluir que para restar un número se suma un número que tiene el signo contrario y el mismo valor absoluto.

3. Analizar ejemplos [D4].

4. Resolver 7.

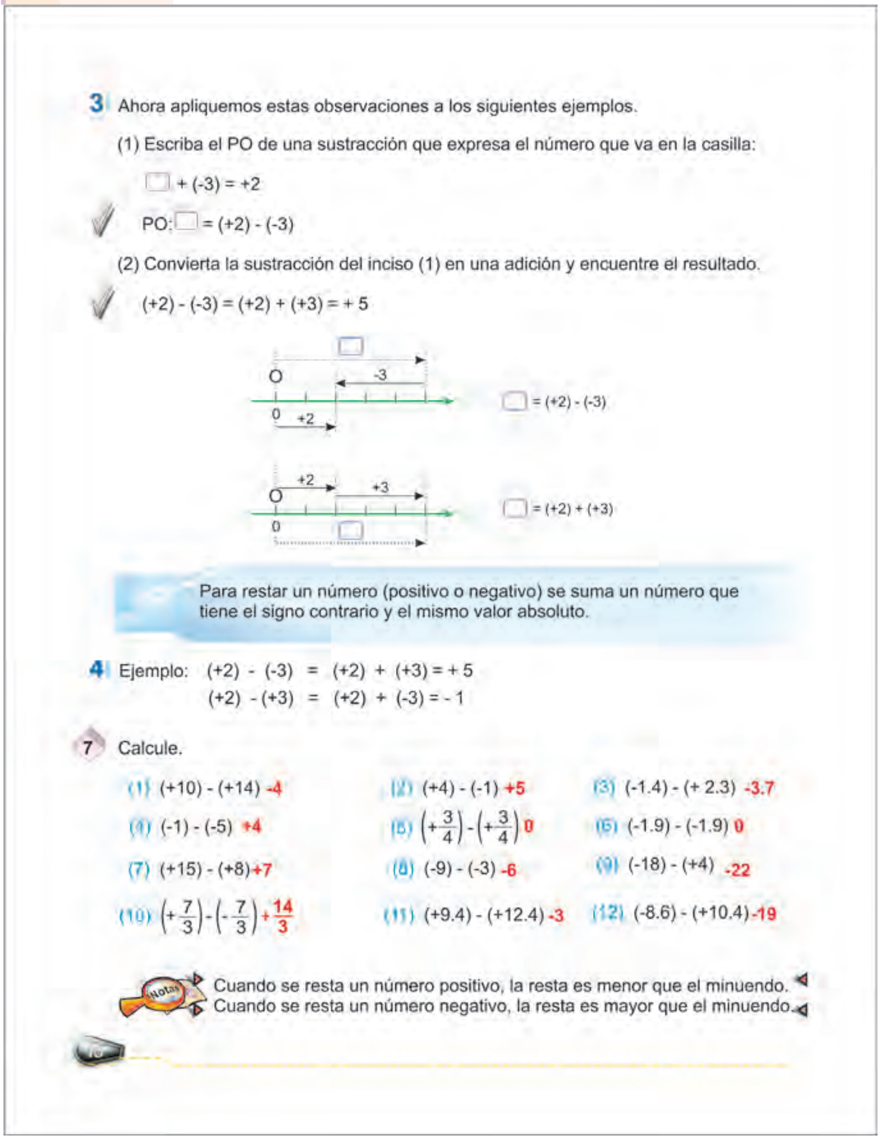
* Si los estudiantes tienen dificultad para convertir una sustracción en una adición repase el contenido anterior.

Lección 2: (5/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo: • Restar dos números convirtiendo la sustracción en una adición.

Materiales:



3 Ahora apliquemos estas observaciones a los siguientes ejemplos.

(1) Escriba el PO de una sustracción que expresa el número que va en la casilla:

□ + (-3) = +2

PO: □ = (+2) - (-3)

(2) Convierta la sustracción del inciso (1) en una adición y encuentre el resultado.

(+2) - (-3) = (+2) + (+3) = + 5

□ = (+2) - (-3)

□ = (+2) + (+3)

Para restar un número (positivo o negativo) se suma un número que tiene el signo contrario y el mismo valor absoluto.

4 Ejemplo: (+2) - (-3) = (+2) + (+3) = + 5
(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = - 1

7 Calcule.

(1) (+10) - (+14) -4 (2) (+4) - (-1) +5 (3) (-1.4) - (+ 2.3) -3.7

(4) (-1) - (-5) +4 (5) $\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$ 0 (6) (-1.9) - (-1.9) 0

(7) (+15) - (+8) +7 (8) (-9) - (-3) -6 (9) (-18) - (+4) -22

(10) $\left(+\frac{7}{3}\right)-\left(-\frac{7}{3}\right)$ $+\frac{14}{3}$ (11) (+9.4) - (+12.4) -3 (12) (-8.6) - (+10.4) -19

Nota: Cuando se resta un número positivo, la resta es menor que el minuendo.
Cuando se resta un número negativo, la resta es mayor que el minuendo.

Lección 2: (6/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo:
- Restar cero de un número y viceversa.
- Resolver problemas aplicando la adición y sustracción de números positivos y negativos.

Materiales:

5 Calcule.

(1) 0 - (+3) (2) 0 - (-3) (3) (+3) - 0 (4) (-3) - 0

(1) 0 - (+3) = 0 + (-3) = -3

(2) 0 - (-3) = 0 + (+3) = +3

(3) (+3) - 0 = ☐ entonces ☐ + 0 = +3; luego ☐ = +3, es decir (+3) - 0 = +3

(4) (-3) - 0 = ☐ entonces ☐ + 0 = -3; luego ☐ = -3, es decir (-3) - 0 = -3

Si se resta un número del cero se cambia el signo del número.
Si se resta cero de un número el resultado es ese número.

8 Calcule.

(1) (+6) - 0 **+6**

(2) 0 - (+1.2) **- 1.2**

(3) $\left(-\frac{3}{2}\right) - 0$ **$-\frac{3}{2}$**

(4) $0 - \left(-\frac{8}{5}\right)$ **$+\frac{8}{5}$**

(5) (+5.4) - 0 **+5.4**

(6) 0 - (-5.4) **+5.4**

9 Resuelva. La dirección positiva está indicada entre paréntesis.

(1) Juan tiene 300 Lempiras para comprar un libro el cual cuesta 315 Lempiras. ¿Puede comprarlo Juan?, ¿le sobra o le falta dinero?, ¿cuánto? (El dinero que Juan tiene).
PO: (+300) - (+315) = - 15
R: No, le falta, 15 Lempiras

(2) Un autobús se desplaza del punto cero 124 m hacia el Oeste y luego 114 m hacia el Este. ¿En qué posición se encuentra el autobús? (Al Este).
PO: (-124) + (+114) = -10
R: 10 m al Oeste del punto cero

(3) Un submarino descendió 27 m y luego ascendió 16 m. ¿En qué posición se encuentra el submarino? (Arriba).
PO: (-27) + (+16) = -11
R: A 11 m bajo el nivel del agua

(4) Al amanecer la temperatura fue de + 4° C y al anochecer había bajado + 9° C. ¿Cuál es la temperatura al anochecer? (La temperatura alta).
PO: (+4) - (+9) = - 5
R: -5° C

1. Efectuar sustracciones con cero. [D5]

M: ¿Qué pasa si sumamos cero a un número?

RP: Nos da el mismo número.

M: ¿Cuáles son los números que van en las casillas?

RP: -3, +3

M: Si restamos un número del cero ¿qué nos da?

RP: El mismo número pero con signo contrario.

M: ¿Cuál es el resultado de (+3) - 0?

RP: +3

M: ¿Cuál es el resultado si restamos cero a un número?

RP: El mismo número.

* Como el cero no tiene signo, no se aplica la regla de sustracción de la página anterior, por lo tanto, se necesita la explicación de 5.

2. Resolver 8 y 9.

* En 9 como son problemas de aplicación los alumnos deben leerlos detenidamente comprendiendo la situación dada, haciendo una representación gráfica del mismo, identificando los datos, escribiendo el PO, encontrando el resultado y dando la respuesta con sus unidades.

* Hay que indicar cuál es la dirección positiva en cada problema.

1. **Convertir a un PO sólo con adición. [E1]**

M: En (+3) - (+5) + (-8) - (-9) ¿Cuántas sustracciones hay?

RP: 2

M: Cambien estas sustracciones de modo que sólo haya adiciones en el PO.

RP: (+3) + (-5) + (-8) + (+9)

2. **Identificar los términos de un PO.**

* Explicar que a cada sumando del PO anterior se le llama término.

M: ¿Cuáles son los términos del PO anterior?

RP: (+3), (-5), (-8) y (+9)

3. **Resolver 10.**

4. **Encontrar el cálculo de un PO sólo con adición. [E2]**

M: ¿Cuánto es el resultado del PO anterior?

RP: -1

M: ¿Cómo lo hicieron?

RP: Sumamos primero los números positivos y después los negativos. Luego sumamos los dos resultados.

* Hacer a los estudiantes que expliquen el desarrollo del cálculo en la pizarra.

* Hacer entender que convirtiendo en la forma de adición se pueden utilizar las propiedad conmutativa y asociativa.

5. **Resolver 11.**

Lección 2: (7/7)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo: • Convertir un PO con adiciones y sustracciones en un PO sólo con adición y calcularlo.

Materiales:

Sección 5: ***Planteamiento sólo con adición***

E Como hemos visto en la sección anterior, se puede convertir una sustracción en una adición. Aplicando esta conversión varias veces, se puede convertir un PO con adición y sustracción en un PO sólo con adición.

1 Cambiemos en adición.

(+3) - (+5) + (-8) - (-9) = (+3) + (-5) + (-8) + (+9)

Se llama **término** a cada número de un PO que está representado sólo con adición.

10 Escriba los términos de los siguientes PO.

(1) (-2) + (+10) - (-5) **-2, +10, +5**

(2) (-5) - (-1) - (+2) **-5, +1, -2**

(3) $\left(+\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{1}{9}\right)$ **$+\frac{4}{3}, +\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}$**

(4) (+1.4) - (+0.28) + (-0.3) - (-3.5) **+ 1.4, -0.28, -0.3, + 3.5**

Después de convertir un PO con adición y sustracción en un PO sólo con adición, se suman los términos positivos y los términos negativos separadamente.

2 Calculemos.

(+3) - (+5) + (-8) - (-9) = (+3) + (-5) + (-8) + (+9)
= {(+3) + (+9)} + {(-5) + (-8)}
= (+12) + (-13)
= -1

11 Convierta a un PO sólo con adición y calcule.

(1) (-3) - (-5) + (-9) + (+4) **-3**

(2) (+8) - (-5) + (-4) - (+7) **+2**

(3) (-7) - (-4) - (-7) - (-8) **+12**

(4) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)$ **-2**

(5) $\left(+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)$ **+3**

(6) (-3.2) - (-4.1) - (-2.1) - (+1.8) **+1.2**

(7) (-2.4) + (-3.1) - (-2.3) + (+4.2) **+1**

(8) (-9) - (-10) + (-5) + (+2) **-2**

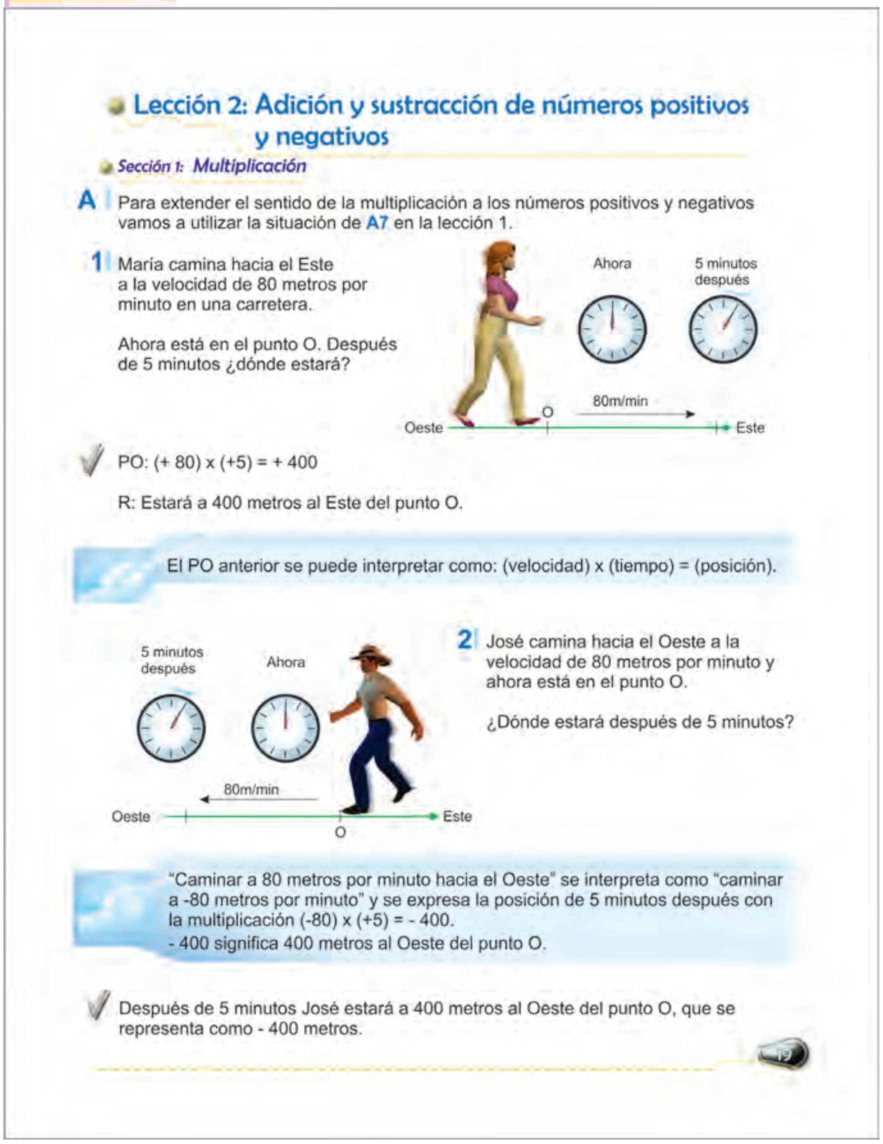
16

Lección 3: (1~2/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Interpretar el sentido de la multiplicación de dos números en términos de la velocidad, el tiempo y la posición.

Materiales:



Lección 2: Adición y sustracción de números positivos y negativos

Sección 1: Multiplicación

A | Para extender el sentido de la multiplicación a los números positivos y negativos vamos a utilizar la situación de A7 en la lección 1.

1 | María camina hacia el Este a la velocidad de 80 metros por minuto en una carretera.

Ahora está en el punto O. Después de 5 minutos ¿dónde estará?

PO: (+ 80) x (+5) = + 400

R: Estará a 400 metros al Este del punto O.

El PO anterior se puede interpretar como: (velocidad) x (tiempo) = (posición).

2 | José camina hacia el Oeste a la velocidad de 80 metros por minuto y ahora está en el punto O.

¿Dónde estará después de 5 minutos?

"Caminar a 80 metros por minuto hacia el Oeste" se interpreta como "caminar a -80 metros por minuto" y se expresa la posición de 5 minutos después con la multiplicación (-80) x (+5) = - 400.
- 400 significa 400 metros al Oeste del punto O.

Después de 5 minutos José estará a 400 metros al Oeste del punto O, que se representa como - 400 metros.

19

1. Interpretar la multiplicación de dos números positivos. [A1]

* Interpretar el caso de María analizando el dibujo.

M: ¿Cómo se interpreta +80?, ¿y +5?

RP: +80 significa que avanza 80 metros por minuto hacia el Este. +5 significa que han transcurrido 5 minutos después de ahora.

M: Después de 5 minutos ¿cuántos metros ha avanzado María y en cuál dirección?

RP: 400 metros al Este.

M: ¿Con cuál PO podemos expresar la situación anterior?

RP: (+80) x (+5).

M: En el PO (+80) x (+5) = +400 ¿Qué representa cada número?

* Concluir que +80 se interpreta como la velocidad, +5 como el tiempo transcurrido y +400 como la posición después de 5 minutos a una velocidad de 80 metros por minuto.

* Concluir que el PO anterior se interpreta como (velocidad) x (tiempo) = (posición final).

2. Expresar la situación con un PO. [A2]

M: ¿Cómo se interpreta la velocidad y el tiempo en el caso de José?

RP: La velocidad negativa y el tiempo positivo.

M: ¿Con cuál PO podemos expresar la situación anterior?

RP: (-80) x (+5)

M: Después de 5 minutos ¿cuántos metros ha avanzado José y en cuál dirección?

RP: 400 metros al oeste.

M: ¿Cómo podemos expresar la posición de José?

RP: -400

* Concluir que -80 se interpreta como la velocidad hacia el Oeste, 5 como el tiempo transcurrido y -400 como la posición al Oeste desde el punto O después de 5 minutos a una velocidad de 80 metros por minuto.

Continúa en la siguiente página...

.. viene de la página anterior.

3. Expresar la situación con un PO. [A3 y A4]

* Auxiliándose de las láminas interpretar las situaciones y determinar el PO y el cálculo de forma similar a la anterior.

4. Interpretar la velocidad, el tiempo y la posición en términos negativos.

M: Si la velocidad hacia el Este se considera positiva ¿Cómo se considera la velocidad hacia el Oeste?

RP: Negativa.

* Hacer preguntas similares con el tiempo antes de ahora y la posición que corresponde a la distancia desde el punto O hacia el Oeste.

5. Analizar la velocidad, el tiempo y la posición cuando los valores son positivos, negativos o cero. [A5]

* Indicar a los estudiantes que inventen PO para cada una de las posibilidades y los interpreten. Por ejemplo:

(+40) x (17), (+9) x (-10), (-12) x (+7) y (-20) x (-15).

Lección 3: (1~2/20) Multiplicación y división de números positivos y negativos

[Continuación]

3 ¿Dónde estuvo María 5 minutos antes?



"5 minutos antes" se interpreta como -5 y se expresa la posición de esos 5 minutos antes con la multiplicación: (+80) x (-5) = -400.

5 minutos antes María estuvo 400 metros al Oeste desde el punto O, que se representa como -400 metros.
De esta manera se define la multiplicación por un número negativo.

4 ¿Dónde estuvo José 5 minutos antes?



Se expresa la posición con la multiplicación (-80) x (-5) = 400.

5 minutos antes José estuvo 400 metros al Este desde el punto O, se representa como + 400 metros.

Así se interpreta que "velocidad negativa" expresa la velocidad hacia el Oeste, que "posición negativa" expresa la posición al Oeste del punto O.

5 Si se interpretan los números negativos en este PO como lo muestra la tabla que se presenta a continuación se puede expresar la respuesta de las preguntas de las siguientes situaciones con la multiplicación.

	Velocidad	Tiempo	Posición final
Cero	No se mueve	Ahora	El punto inicial O
Positivo	Se camina hacia el Este	Futuro	Al Este del punto O
Negativo	Se camina hacia el Oeste	Pasado	Al Oeste del punto O

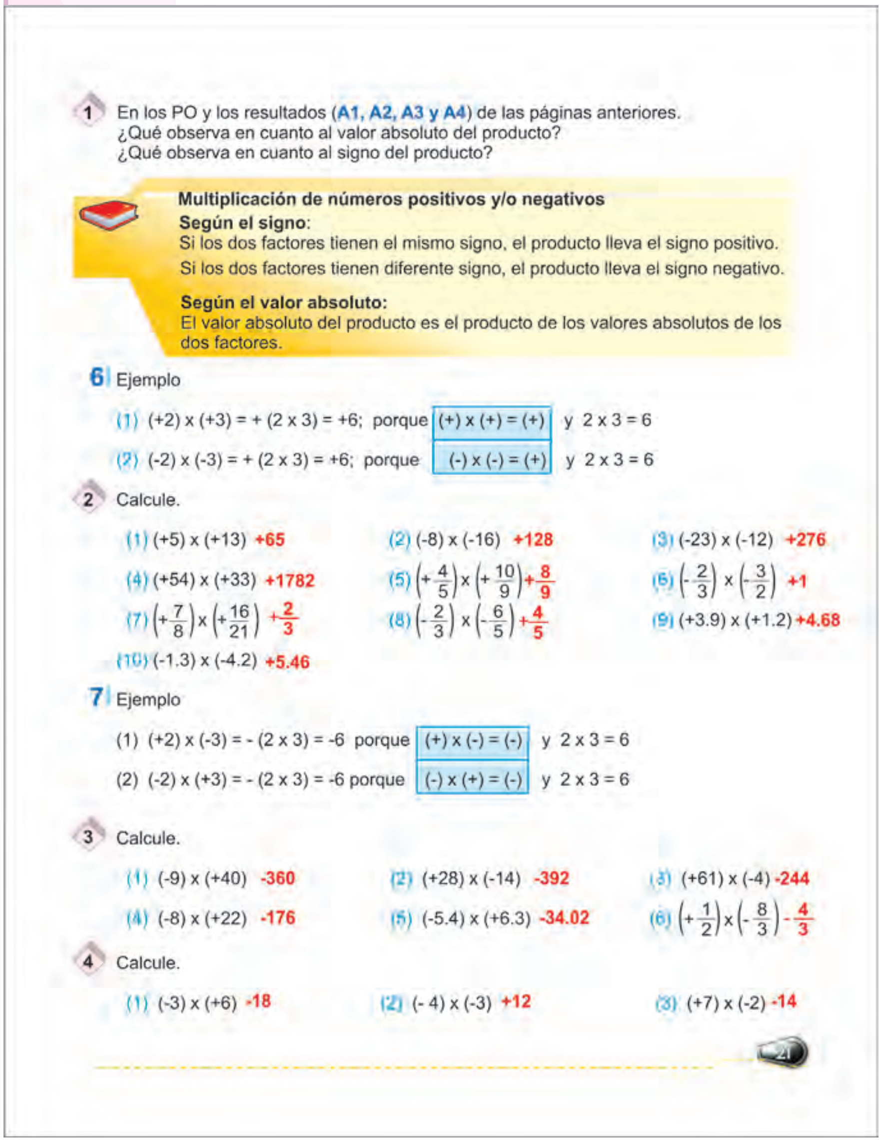
26

Lección 3: (3/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Multiplicar dos números aplicando la ley de los signos.

Materiales:



1 En los PO y los resultados (**A1, A2, A3 y A4**) de las páginas anteriores.
¿Qué observa en cuanto al valor absoluto del producto?
¿Qué observa en cuanto al signo del producto?

Multiplicación de números positivos y/o negativos
Según el signo:
Si los dos factores tienen el mismo signo, el producto lleva el signo positivo.
Si los dos factores tienen diferente signo, el producto lleva el signo negativo.

Según el valor absoluto:
El valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los dos factores.

6 Ejemplo

(1) (+2) x (+3) = + (2 x 3) = +6; porque (+) x (+) = (+) y 2 x 3 = 6

(2) (-2) x (-3) = + (2 x 3) = +6; porque (-) x (-) = (+) y 2 x 3 = 6

2 Calcule.

(1) (+5) x (+13) **+65** (2) (-8) x (-16) **+128** (3) (-23) x (-12) **+276**

(4) (+54) x (+33) **+1782** (5) $\left(+\frac{4}{5}\right) \times \left(+\frac{10}{9}\right)$ **$+\frac{8}{9}$** (6) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ **+1**

(7) $\left(+\frac{7}{8}\right) \times \left(+\frac{16}{21}\right)$ **$+\frac{2}{3}$** (8) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right)$ **$+\frac{4}{5}$** (9) (+3.9) x (+1.2) **+4.68**

(10) (-1.3) x (-4.2) **+5.46**

7 Ejemplo

(1) (+2) x (-3) = - (2 x 3) = -6 porque (+) x (-) = (-) y 2 x 3 = 6

(2) (-2) x (+3) = - (2 x 3) = -6 porque (-) x (+) = (-) y 2 x 3 = 6

3 Calcule.

(1) (-9) x (+40) **-360** (2) (+28) x (-14) **-392** (3) (+61) x (-4) **-244**

(4) (-8) x (+22) **-176** (5) (-5.4) x (+6.3) **-34.02** (6) $\left(+\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{8}{3}\right)$ **$-\frac{4}{3}$**

4 Calcule.

(1) (-3) x (+6) **-18** (2) (- 4) x (-3) **+12** (3) (+7) x (-2) **-14**

21

Es muy importante verificar los procedimientos empleados por los estudiantes ya que se necesita el uso correcto de las tablas de multiplicar y los procedimientos para multiplicar números decimales y fracciones.

1. Resolver 1.

* Escribir los PO en la pizarra junto con sus resultados:
80 x 5 = 400; (-80) x 5 = -400;
80 x (-5) = -400 y
(-80) x (-5) = 400.

M: ¿Qué observan en cuanto al valor absoluto del producto?

RP: Que es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

M: ¿Qué observan en cuanto al signo del producto?

RP: Que algunos son positivos y otros negativos.

* Concluir lo que se presenta en el resumen. Hay que tener cuidado que los estudiantes no consulten el resumen del LE porque el objetivo es que ellos lo deduzcan.

* Puede ejemplificar los cuatro casos de la multiplicación con palabras (más por más, más por menos, etc.).

2. Utilizar la ley para dos factores del mismo signo. [A6]

* Indicar que los desarrollen con ayuda del cuadro resumen del LE.

* Concluir que la multiplicación de dos números de igual signo da resultado positivo.

3. Resolver 2.

4. Utilizar la ley para dos factores de diferente signo. [A7]

* Indicar que los desarrollen con ayuda del cuadro resumen del LE.

* Concluir que la multiplicación de dos números de distinto signo da resultado negativo.

5. Resolver 3 y 4.

Lección 3: (4/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Multiplicar un número por 1, -1 y 0.

Materiales:

8 Compare el producto con el factor que no es 1 ni -1.

Productos con el factor 1

(1) 3 x 1 (2) 1 x 3 (3) (-3) x 1 (4) 1 x (-3)

✓ (1) 3 (2) 3 (3) (-3) (4) (-3) .... No cambia

Productos con el factor - 1

(1) 3 x (-1) (2) (-1) x 3 (3) (-3) x (-1) (4) (-1) x (-3)

✓ (1) -3 (2) -3 (3) 3 (4) 3 .... Cambia el signo

El producto de un número positivo o negativo por el factor 1 es el mismo número.
El producto de un número positivo o negativo por el factor -1 es el mismo número con diferente signo.

9 Usando la situación de **A2** y **A3**, encuentre (-80) x 0 y 0 x (-5).

✓ (-80) x 0 representa la posición de José después de 0 minutos, es decir, ahora.
Por tanto equivale a 0.

0 x (-5) representa la posición de una persona que permanece en el punto O.
Por lo tanto equivale a 0.

☐ x 0 = 0 0 x ☐ = 0
Un número multiplicado por cero es igual a cero.

5 Calcule.

(1) (+3) x 0 **0** (2) 0 x (+2) **0** (3) (-8) x 0 **0**

(4) 0 x (-20) **0** (5) $\left(+\frac{1}{2}\right) \times 0$ **0** (6) $0 \times \left(-\frac{3}{4}\right)$ **0**

(7) 0 x (+15.1) **0** (8) (-8.3) x 0 **0**

1. **Multiplicar un número por 1 ó -1. [A8]**

M: ¿Cuál es el resultado de 3 x 1?, ¿cómo se interpreta?

RP: Es 3 porque 1 vez 3 es 3?

M: ¿Cómo es el producto en relación con el número que no es 1 (caso (1))?

RP: Es igual al mismo número.

* Concluir que al multiplicar un número positivo o negativo por 1 el resultado es el mismo número.

M: ¿Cómo es el producto en relación con el número que no es -1 (caso (2))?

RP: Es igual al mismo número pero con signo contrario.

* Concluir que al multiplicar un número positivo o negativo por -1 el resultado es el mismo número pero con signo contrario.

2. **Multiplicar por cero. [A9]**

* Recordar la situación planteada en [A2].

M: ¿Qué sucede con la posición de José después de 0 minutos?

RP: No avanza, no recorre nada, permanece en el mismo punto.

¿Cómo se puede expresar con un PO esta situación?

RP: (-80) x 0 = 0.

* Concluir que 0 representa el tiempo de ahora y por lo tanto no hay recorrido.

* Desarrollar 0 x (-5) de forma análoga.

M: ¿Qué conclusión podemos sacar de todo esto?

RP: Que un número multiplicado por cero es igual a cero.

3. **Resolver 5.**

Lección 3: (5/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo:

- Multiplicar tres o más números en el orden más conveniente aplicando la propiedad conmutativa y asociativa.

Materiales:

Sección 2: ***Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación***

B1 Compare el resultado de (+3) x (-4) y (-4) x (+3).

(+3) x (-4) = - (3 x 4)
 = -12

(-4) x (+3) = - (4 x 3)
 = -12

Son iguales.

Como el signo y el valor absoluto del producto no dependen del orden de los factores, tenemos para los números positivos y negativos las siguientes propiedades.

> **Propiedad conmutativa** de la multiplicación.
> □ x △ = △ x □

2 Compare el resultado de {(+3) x (-4)} x (-2) y (+3) x {(-4) x (-2)}.

{(+3) x (-4)} x (-2) = (-12) x (-2)
 = +24

(+3) x {(-4) x (-2)} = (+3) x (+8)
 = +24

Son iguales

> **Propiedad asociativa** de la multiplicación.
> (□ x ○) x △ = □ x (○ x △)

Gracias a estas propiedades se puede calcular el producto de varios números en cualquier orden.

3 Ejemplo (-25) x (+13) x (+4) = (-25) x (+4) x (+13)
 = {(-25) x (+4)} x (+13)
 = (-100) x (+13)
 = -1300

6 Calcule.

(1) (-2) x (-15) x (+5) x (+4) **+600**

(2) (-1.2) x (+2.3) x (+0.5) **-1.38**

(3) (+5) x (+3) x (+8) x (+4) **+480**

(4) (+7) x (+2) x (-3) x (+5) **-210**

(5) (-3) x (-20) x (-4) x (-5) **+1200**

(6) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ **$-\frac{5}{7}$**

Notas: Incluir ejemplos con fracciones y decimales.

1. Multiplicar dos números con diferente signo cambiando el orden de los factores. [B1]

M: Calculen +3 x (-4) y (-4) x +3. ¿Cómo son los resultados?

RP: -12, son iguales.

M: ¿Qué podemos deducir de estas respuestas?

RP: Que podemos multiplicar dos números en cualquier orden y siempre da lo mismo.

M. ¿Cómo se llama esta propiedad?

RP: Conmutativa.

* Concluir que el signo y el valor absoluto del producto no dependen del orden de los factores.

2. Multiplicar tres números cambiando la forma de asociarlos. [B2]

* Después de la resolución individual indicar a dos estudiantes que resuelvan en el pizarrón el PO del LE de las dos formas propuestas y que comparen sus respuestas.

* Concluir a través de preguntas y respuestas que por medio de la propiedad asociativa podemos multiplicar tres números en diferente orden sin alterar el resultado.

3. Calcular aplicando las propiedades. [B3]

* Inducir a los alumnos para que asocien primeramente los dos números que sean los más adecuados (en este caso (-25) x +4 = -100) y después aplicar la multiplicación abreviada por 100.

* Concluir que por medio de las propiedades conmutativa y asociativa podemos multiplicar tres o más números cambiando el orden para que sea más fácil.

4. Resolver 6.

Lección 3: (6/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Determinar el signo del producto por la cantidad de factores negativos que tenga el PO.

Materiales:

1. **Determinar el signo del producto. [B4]**

M: ¿Cuál es el signo del producto de (-1) x (-2) y (-1) x (-2) x (-3)?

RP: Positivo (+) y negativo (-) respectivamente.

M: ¿Por qué da esos resultados?

RP: Da positivo porque los dos factores son negativos. Da negativo pues al multiplicar los dos primeros factores da positivo y al multiplicarlo con el último queda negativo.

* Indicarles que obtengan el signo de los demás ejercicios (3)~(5).

2. **Encontrar la regla.**

M: Observen los signos de los cinco productos anteriores. ¿Qué observan?

RP: Que se van alternando: positivo, negativo, etc.

M: ¿Qué relación hay en el signo?

RP: Cuando hay 2, 4 ó 6 factores con signo negativo el signo del producto es positivo y cuando hay 3 ó 5 es negativo.

* Concluir que si el número de factores negativos es par el producto es positivo y si es impar es negativo. Asimismo que el valor absoluto del producto es la multiplicación de los valores absolutos de los factores.

3. **Calcular usando la regla. [B5]**

M: ¿Cuál es el resultado?

RP: -120

M: ¿Por qué el resultado es negativo?

RP: Porque si hay tres factores negativos el producto es negativo. Si el número de factores negativos es impar (tres) el producto es negativo.

4. **Resolver 7.**

---

4 Investigue el signo de los siguientes productos.

(1) (-1) x (-2)
(2) (-1) x (-2) x (-3)
(3) (-1) x (-2) x (-3) x (-4)
(4) (-1) x (-2) x (-3) x (-4) x (-5)
(5) (-1) x (-2) x (-3) x (-4) x (-5) x (-6)

Se obtienen los signos:
(1) + (2) - (3) + (4) - (5) +

La cantidad de factores en (1), (3) y (5) es par; en (2) y (4) es impar.

Multiplicación de varios números negativos

Según el signo:
Si la cantidad de números negativos que se multiplican es par, el signo del producto es positivo (+).
Si la cantidad de números negativos que se multiplican es impar, el signo del producto es negativo (-).

Según el valor absoluto:
El valor absoluto del producto, es el producto de los valores absolutos de los factores.

Para calcular la multiplicación se escribe el signo y después el producto de los valores absolutos de los factores.

5 Ejemplo.

(-3) x (+2) x (-5) x (-4) = - (3 x 2 x 5 x 4)
= -120

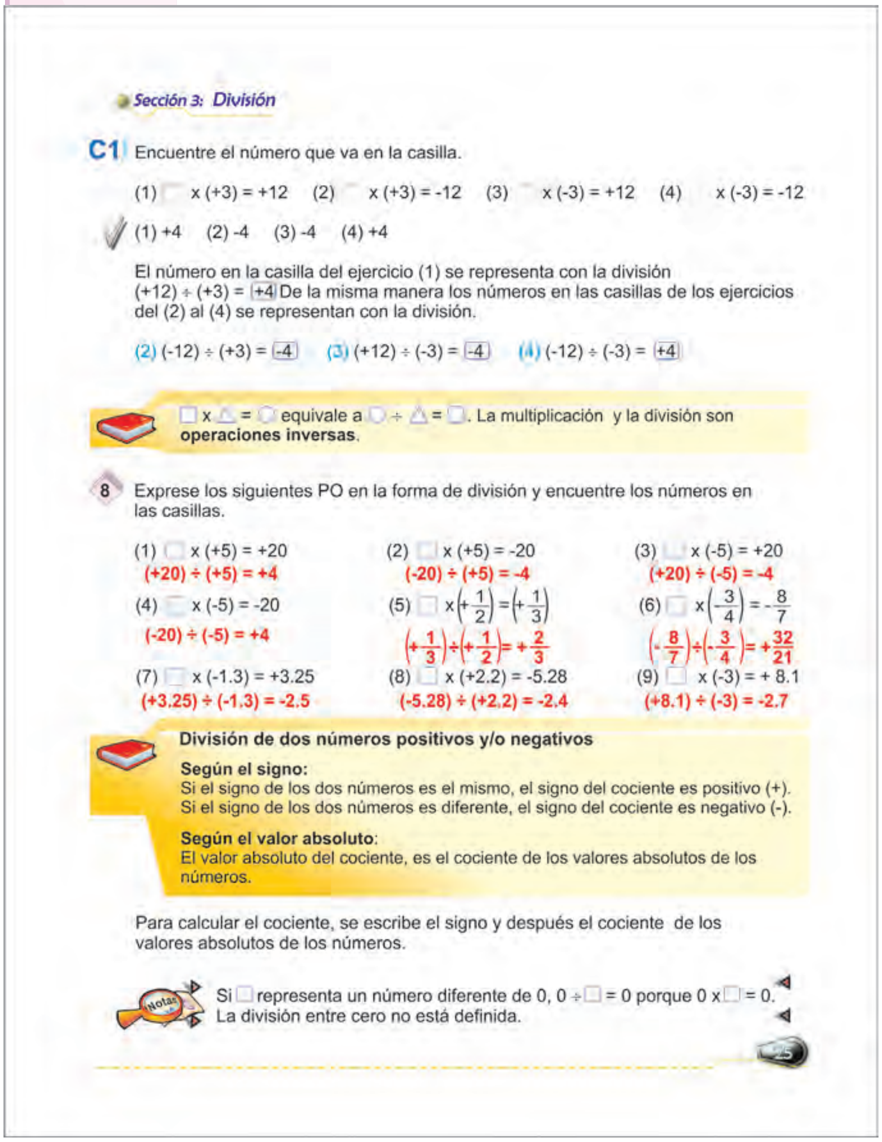
7 Calcule.

(1) (-7) x (-3) x (-5) x (-8) **+840**
(2) $\left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{3}{2}\right)$ **$+\frac{1}{4}$**
(3) (+5) x (+9) x (+2) x (-1) **-90**
(4) $\left(+\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(+\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ **$-\frac{2}{25}$**
(5) (+4) x (-6) x (+5) x (+10) **-1200**
(6) (+0.1) x (-0.2) x (+1.2) **-0.024**
(7) (-8) x (+11) x (-5) x (-2) **-880**
(8) (-1.4) x (+1.2) x (-2.1) **+3.528**
(9) (+2) x (+4) x (+6) x (+8) **+384**
(10) $\left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$ **$-\frac{2}{25}$**

Lección 3: (7/20) Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Escribir un PO de multiplicación como un PO de división.

Objetivo: (8/20) • Dividir dos números aplicando la ley de los signos.


Sección 3: División

C1 Encuentre el número que va en la casilla.

(1) ☐ x (+3) = +12 (2) ☐ x (+3) = -12 (3) ☐ x (-3) = +12 (4) ☐ x (-3) = -12

(1) +4 (2) -4 (3) -4 (4) +4

El número en la casilla del ejercicio (1) se representa con la división (+12) ÷ (+3) = [+4] De la misma manera los números en las casillas de los ejercicios del (2) al (4) se representan con la división.

(2) (-12) ÷ (+3) = [-4] (3) (+12) ÷ (-3) = [-4] (4) (-12) ÷ (-3) = [+4]

☐ x △ = ◯ equivale a ◯ ÷ △ = ☐. La multiplicación y la división son **operaciones inversas**.

8 Expresse los siguientes PO en la forma de división y encuentre los números en las casillas.

(1) ☐ x (+5) = +20 — **(+20) ÷ (+5) = +4**

(2) ☐ x (+5) = -20 — **(-20) ÷ (+5) = -4**

(3) ☐ x (-5) = +20 — **(+20) ÷ (-5) = -4**

(4) ☐ x (-5) = -20 — **(-20) ÷ (-5) = +4**

(5) ☐ $\times\left(+\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{1}{3}\right)$ — $\left(+\frac{1}{3}\right)\div\left(+\frac{1}{2}\right)=+\frac{2}{3}$

(6) ☐ $\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{8}{7}$ — $\left(-\frac{8}{7}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{32}{21}$

(7) ☐ x (-1.3) = +3.25 — **(+3.25) ÷ (-1.3) = -2.5**

(8) ☐ x (+2.2) = -5.28 — **(-5.28) ÷ (+2.2) = -2.4**

(9) ☐ x (-3) = + 8.1 — **(+8.1) ÷ (-3) = -2.7**

División de dos números positivos y/o negativos

Según el signo:
Si el signo de los dos números es el mismo, el signo del cociente es positivo (+).
Si el signo de los dos números es diferente, el signo del cociente es negativo (-).

Según el valor absoluto:
El valor absoluto del cociente, es el cociente de los valores absolutos de los números.

Para calcular el cociente, se escribe el signo y después el cociente de los valores absolutos de los números.

Si ☐ representa un número diferente de 0, 0 ÷ ☐ = 0 porque 0 x ☐ = 0.
La división entre cero no está definida.

25

Pueden incluir ejercicios con decimales.

1. Escribir un PO con división. [C1]

M: ¿Cómo podemos conocer el número que va en la casilla en ☐ x (+3) = +12?

RP: Buscando un número que multiplicado por +3 dé igual a +12. Dividiendo, (+12) ÷ (+3).

M: ¿Cuál es el número que va en la casilla?

RP: +4

* Concluir que una multiplicación se puede expresar como una división.
* Concluir que el valor de ☐ en ☐ x (+3) = +12 se encuentra a través de la división, es decir, ☐ = (+12) ÷ (+3).
* Indicar que encuentren los valores para (2)~(4).

2. Resolver 8.

[Hasta aquí 7/20]

[Desde aquí 8/20]

1. Analizar los signos en los PO de 8.

M: Observen el signo de cada cálculo y encuentren la regla.

* Concluir que el cociente de la división de dos números es positivo si ambos tienen el mismo signo y es negativo si tienen signos diferentes. Asimismo concluir sobre el valor absoluto.

M: ¿Con cuál de las operaciones se parecen estos resultados?

RP: Con la multiplicación.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

2. Calcular los cocientes. [C2]

* Indicar que calculen los cocientes aplicando la ley de los signos.

3. Resolver 9 .

4. Escribir un cociente inexacto como fracción. [C3]

M: ¿Es exacto el cociente de dividir (-5) ÷ (+3)? ¿Cómo se puede expresar una fracción?

RP: No. $-\frac{5}{3}$.

* Concluir que si uno de los términos es negativo la fracción resultante es negativa.

* Desarrollar [D4] en forma similar.

3. Resolver 10 .

Lección 3: (8/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

[Continuación]

2 Analice las siguientes divisiones.

(1) $(+18) \div (+6) = +(18 \div 6)$
$= +3$ — $(+) \div (+) = (+)$

(2) $(-18) \div (-6) = +(18 \div 6)$
$= +3$ — $(-) \div (-) = (+)$

(3) $(+18) \div (-6) = -(18 \div 6)$
$= -3$ — $(+) \div (-) = (-)$

(4) $(-18) \div (+6) = -(18 \div 6)$
$= -3$ — $(-) \div (+) = (-)$

9 Calcule.

(1) $(+80) \div (-4)$ (2) $(-32) \div (-8)$ (3) $(-66) \div (+6)$

(4) $(+54) \div (+2)$ (5) $(-123) \div (-3)$ (6) $(-72) \div (+12)$

(7) $(+6.89) \div (-1.3)$ (8) $(-3.24) \div (-0.4)$ (9) $\left(+\frac{7}{6}\right) \div \left(+\frac{2}{3}\right)$

(10) $\left(-\frac{4}{3}\right) \div \left(+\frac{4}{9}\right)$ (11) $\left(-\frac{8}{3}\right) \div \left(-\frac{2}{5}\right)$ (12) $(+120) \div (-40)$

3 Ejemplo.

$(-5) \div (+3) = -(5 \div 3) = -\frac{5}{3}$

Notas: $-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$, pero en este LE vamos a usar las fracciones impropias en lugar de las fracciones mixtas.

4 Ejemplo.

$\frac{-5}{3} = (-5) \div 3 = -(5 \div 3) = -\frac{5}{3}$, por lo tanto $\frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

10 De la misma forma deduzca que $\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$.

Lección 3: (9/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Convertir una fracción en su equivalente decimal.

Materiales:

Sección 4: **Conversión de fracciones a decimales**

Notas: A partir de ahora, se omite el signo + de los números positivos.

D Ya aprendimos que se puede expresar el cociente de dos números con una fracción.

Ejemplo: $2 \div 3 = \frac{2}{3}$

Notas: De ahora en adelante, se expresará la división de dos números enteros como fracción.

Si se utiliza esta relación se calcula rápidamente la conversión de fracciones en números decimales.

1 Convierta en número decimal.

(1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\frac{4}{33}$

(1) $-\frac{3}{8} = (-3 \div 8)$
$= -0.375$

```
     0.375
8 ) 3.000
    2 4
      60
      56
       40
       40
        0
```

(2) $\frac{4}{33} = 4 \div 33$
$= 0.121212...$

```
       0.1212..
33 ) 4.0000....
     3 3
       70
       66
        40
        33
         70
         66
          4
```

11 Convierta a su equivalente decimal.

(1) $-\frac{9}{4}$ **-2.25** (2) $-\frac{5}{6}$ **-0.833...** (3) $\frac{20}{-9}$ **-2.22...** (4) $-\frac{3}{5}$ **-0.6** (5) $-\frac{14}{15}$ **-0.933...**

(6) $\frac{-7}{25}$ **-0.28** (7) $-\frac{23}{18}$ **-1.277...** (8) $-\frac{16}{3}$ **-5.33...** (9) $\frac{25}{27}$ **+0.925925...** (10) $-\frac{9}{8}$ **-1.125**

(11) $-\frac{7}{12}$ **-0.5833...** (12) $-\frac{9}{11}$ **-0.8181...** (13) $-\frac{5}{16}$ **-0.3125** (14) $-\frac{23}{16}$ **-1.4375** (15) $-\frac{7}{33}$ **-0.2121...**

27

1. **Dar a conocer que a partir de esta clase se omite es signo + de los números positivos.**

2. **Calcular el equivalente decimal de una fracción. [D y D1]**

* Repasar la escritura de 2 ÷ 3 como una fracción.

M: Dividan 3 entre 8, ¿cuál es el resultado?

RP: -0.375

* Concluir que $-\frac{3}{8} = -0.375$

* Apoyar el proceso de división ya que 3 < 8 y hay que agregar ceros al dividendo para continuar la división.

* Desarrollar (2) de [D1] en forma similar.

* Tener el cuidado de detener el proceso de división cuando en el cociente se repiten una o más cifras.

* Cuando el divisor es 2, 5 o el producto de estos números la división será exacta.

3. **Resolver 11.**

* Puede permitirse el uso de la calculadora para verificar las respuestas.

Lección 3: (10/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Encontrar el recíproco de una fracción.

Materiales:

1. Escribir un PO con división. [E1]

M: ¿Cómo podemos conocer el número que va en la casilla en $-\frac{2}{3} \times \square = 1$?

RP: Buscando un número que multiplicado por $-\frac{2}{3}$ de 1.

Dividiendo, $1 \div \left(-\frac{2}{3}\right)$.

M: ¿Cuál es el número que va en la casilla?

RP: $-\frac{3}{2}$

* Llamar a $-\frac{3}{2}$ recíproco o inverso multiplicativo de $-\frac{2}{3}$.

* Concluir con el concepto de inverso multiplicativo.

2. Encontrar el recíproco de una fracción. [E2]

M: Comparen $-\frac{2}{3}$ con $-\frac{3}{2}$,¿cuál es la diferencia?

RP: Que sus términos están invertidos y conservan el mismo signo.

M: ¿Cuál es el resultado de multiplicar estas dos fracciones?

RP: Es 1.

* Confirmar que el recíproco de $-\frac{2}{3}$ es de igual signo, solo cambian numerador y denominador, es decir $-\frac{3}{2}$.

* Trabajar en forma similar los demás recíprocos de esta sección.

M: ¿Cuál es el recíproco de 0?

RP: 0, 3, $\frac{0}{3}$, no hay.

* Discutir todas las respuestas y comprobar que cero no tiene recíproco.

3. Resolver 12.

Sección 5: Recíproco o inverso multiplicativo

E1 Encuentre el número que va en la casilla.

$$-\frac{2}{3} \times \square = 1$$
$$\square = 1 \div \left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$\square = -\left(1 \div \frac{2}{3}\right)$$
$$\square = -\left(1 \times \frac{3}{2}\right)$$
$$\square = -\frac{3}{2}$$

Al multiplicarse ambos números

$$-\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$$

Un número es **inverso multiplicativo o reciproco** de otro número cuando al multiplicarse ambos números el producto es 1.

2 Ejemplo.

El recíproco de $-\frac{2}{3}$ es $-\frac{3}{2}$

El recíproco de $-\frac{3}{2}$ es $-\frac{2}{3}$

El recíproco de 0.8 es $\frac{1}{0.8} = \frac{1 \times 10}{0.8 \times 10} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1.25$

El cero no tiene recíproco.

Notas: El número cero no tiene reciproco, porque $0 \times \square = 1$ es imposible.

12 Encuentre el reciproco de los siguientes números.

(1) $-\frac{4}{3}$ $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{9}$ $\frac{9}{2}$ (3) -8 $-\frac{1}{8}$ (4) 0.4 2.5

(5) 3 $\frac{1}{3}$ (6) -1.6 -0.625 (7) $-\frac{1}{7}$ -7 (8) $\frac{1}{2}$ 2

(9) $-\frac{6}{11}$ $-\frac{11}{6}$ (10) -2.5 -0.4 (11) $-\frac{3}{7}$ $-\frac{7}{3}$ (12) 0.2 5

(13) 5 $\frac{1}{5}$ (14) $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{5}$ (15) -0.25 -4 (16) -4 $-\frac{1}{4}$

Lección 3: (11/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Convertir una división en una multiplicación y calcular.

Materiales:

3 Se puede convertir una división en una multiplicación utilizando el recíproco.

Ejemplo

Compare: $\frac{6}{7} \div \left(-\frac{2}{3}\right)$ y $\frac{6}{7} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\frac{6}{7} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{6}{7} \div \frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{6}{7} \times \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{7}$$

$$\frac{6}{7} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{6}{7} \times \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{7}$$

4 Como los resultados son iguales la división se puede convertir en una multiplicación utilizando el recíproco. Esto es $\frac{6}{7} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{7} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$.

Ejemplo

(1) $5 \div \left(-\frac{3}{2}\right) = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(5 \times \frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}$

(2) $\left(-\frac{3}{7}\right) \div 6 = \left(-\frac{3}{7}\right) \times \frac{1}{6} = -\left(\frac{3}{7} \times \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{14}$

(3) $-6 \div 0.2 = -6 \times \frac{1}{0.2} = -6 \times \frac{1 \times 10}{0.2 \times 10} = -6 \times \frac{10}{2} = -6 \times 5 = -30$

13 Calcule.

(1) $4 \div \left(-\frac{3}{4}\right)$ $-\frac{16}{3}$ (2) $(-10) \div \left(-\frac{3}{4}\right)$ $\frac{40}{3}$ (3) $3 \div \frac{9}{5}$ $\frac{5}{3}$ (4) $\frac{7}{3} \div (-2)$ $-\frac{7}{6}$

(5) $\left(-\frac{3}{8}\right) \div 6$ $-\frac{1}{16}$ (6) $\left(-\frac{1}{4}\right) \div (-3)$ $\frac{1}{12}$ (7) $\left(-\frac{4}{9}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$ $\frac{2}{3}$ (8) $\frac{8}{9} \div \frac{4}{7}$ $\frac{14}{9}$

(9) $\left(-\frac{7}{4}\right) \div \frac{7}{4}$ -1 (10) $\frac{4}{5} \div \left(-\frac{7}{4}\right)$ $-\frac{16}{35}$ (11) $5 \div (-2.5)$ -2 (12) $8 \div 0.4$ 20

1. Comparar una división de fracciones con la multiplicación equivalente utilizando el recíproco. [E3]

M: Calcule $\frac{6}{7} \div \left(-\frac{2}{3}\right)$ y $\frac{6}{7} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$. ¿Cómo son los resultados?, ¿qué observa?

RP: Los resultados son iguales. En la multiplicación se utiliza el recíproco del divisor.

* Concluir que una división se puede convertir en una multiplicación utilizando el recíproco del divisor.

2. Dividir utilizando el recíproco del divisor. [E4]

* Indicar que conviertan las divisiones en multiplicaciones y calculen.

3. Resolver 13 .

* Supervisar la forma del cálculo de los estudiantes especialmente cuando el divisor es un número decimal.

* Los estudiantes ya aprendieron en la primaria la división de fracciones. Aquí se utiliza el concepto de recíproco y manejan los números negativos.

1. Escribir la división de fracciones como una fracción compleja. [F1]

M: ¿Cómo se puede escribir la división $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right)$ como una fracción?

* Indicar que consideren cada fracción como un número y no como dos.

RP: $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}}$

* Definir una fracción compleja.

2. Evaluar una fracción compleja. [F2]

M: Escriba la fracción compleja anterior como la división de dos fracciones y encuentre el resultado de la división.

RP: $\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{6}$

* Llamar a este proceso evaluación de una fracción compleja.

M: ¿Qué se hace para evaluar una fracción compleja?

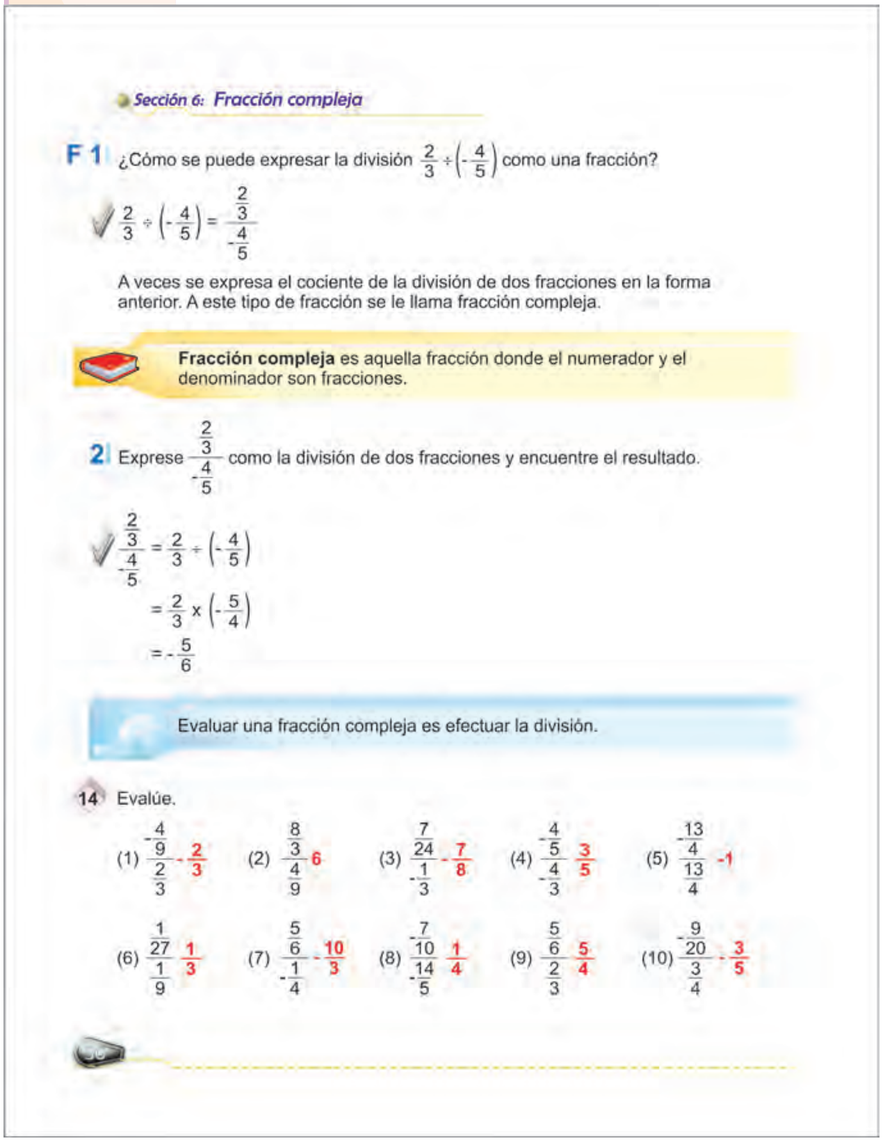
RP: Efectuar la división.

3. Resolver 14 .

Lección 3: (12/20) Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Evaluar una fracción compleja.

Materiales:



Sección 6: Fracción compleja

F 1 ¿Cómo se puede expresar la división $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right)$ como una fracción?

$\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}}$

A veces se expresa el cociente de la división de dos fracciones en la forma anterior. A este tipo de fracción se le llama fracción compleja.

Fracción compleja es aquella fracción donde el numerador y el denominador son fracciones.

2 Exprese $\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}}$ como la división de dos fracciones y encuentre el resultado.

$\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{4}\right)$

$= -\frac{5}{6}$

Evaluar una fracción compleja es efectuar la división.

14 Evalúe.

(1) $\dfrac{-\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}$ $-\frac{2}{3}$ (2) $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{9}}$ 6 (3) $\dfrac{\frac{7}{24}}{-\frac{1}{3}}$ $-\frac{7}{8}$ (4) $\dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{4}{3}}$ $\frac{3}{5}$ (5) $\dfrac{-\frac{13}{4}}{\frac{13}{4}}$ -1

(6) $\dfrac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{3}$ (7) $\dfrac{\frac{5}{6}}{-\frac{1}{4}}$ $-\frac{10}{3}$ (8) $\dfrac{-\frac{7}{10}}{-\frac{14}{5}}$ $\frac{1}{4}$ (9) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}$ $\frac{5}{4}$ (10) $\dfrac{-\frac{9}{20}}{\frac{3}{4}}$ $-\frac{3}{5}$

Lección 3: (13/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo:
- Calcular potencias de exponente 2 y 3.
- Expresar potencias como raíz cúbica y viceversa.

Materiales:

Sección 7: Potencias y raíces

G1 Ejemplo

(1) $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ (2) $-2^2 = -(2 \times 2) = -4$

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (4) $-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Notas: $(-2)^2$ se lee " -2 al cuadrado" o "-2 elevado a la dos"

Un número negativo elevado a la dos (o a cualquier otro número) debe encerrarse en un paréntesis.
Una fracción (negativa o positiva) elevada a un número debe encerrarse en un paréntesis. Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ y $\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

15 Calcule.

(1) $(-4)^2$ **16** (2) -4^2 **-16** (3) -6^2 **-36** (4) $(-6)^2$ **36** (5) $(-8)^2$ **64**

(6) -8^2 **-64** (7) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ $\frac{9}{4}$ (8) $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $-\frac{9}{4}$ (9) $(-0.2)^2$ **0.04** (10) -3.5^2 **-12.25**

16 Exprese en la forma de potencia.

(1) 3×3 3^2 (2) $(-3) \times (-3)$ $(-3)^2$ (3) $-(3 \times 3)$ -3^2

Cuando existe la relación $□^2 = △$ entre dos números □ y △ se dice que □ es la **raíz cuadrada** de △ y si □ no es negativo se escribe $\sqrt{△} = □$.

Cuando existe la relación $□^3 = △$ entre dos números □ y △ se dice que □ es la **raíz cúbica** de △ y se □ escribe $\sqrt[3]{△} = □$.

2 Ejemplo

Como $2^3 = 8$ entonces $\sqrt[3]{8} = 2$ Como $(-2)^3 = -8$ entonces $\sqrt[3]{-8} = -2$

17 Escriba el equivalente de la expresión como potencia o como raíz cúbica.

(1) $3^3 = 27$ $\sqrt[3]{27} = 3$ (2) $\sqrt[3]{64} = 4$ $4^3 = 64$ (3) $1^3 = 1$ $\sqrt[3]{1} = 1$ (4) $\sqrt[3]{-1} = -1$ $(-1)^3 = -1$ (5) $(-3)^3 = -27$ $\sqrt[3]{-27} = -3$

(6) $\sqrt[3]{125} = 5$ $5^3 = 125$ (7) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ (8) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$ (9) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$ $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$ (10) $(0.1)^3 = 0.001$ $\sqrt[3]{0.001} = 0.1$

(11) $\sqrt[3]{-0.008} = -0.2$ $(-0.2)^3 = -0.008$ (12) $\sqrt[3]{-3.375} = -1.5$ $(-1.5)^3 = -3.375$

31

1. Calcular potencias con exponente 2. [G1]

* Indicar que calculen $(-2)^2$ y -2^2.

M: ¿Por qué los resultados son distintos?, ¿cuál es la diferencia en los PO?

RP: En el primero la base -2 está entre paréntesis y en el otro no.

M: ¿Qué concluyen?

RP: Si elevamos un número negativo a la 2 éste debe encerrarse entre paréntesis para que el resultado sea positivo y si no se encierra el resultado es negativo.

* Dar a conocer que se utilizan paréntesis aún cuando se trata de fracción positiva para evitar errores.

2. Resolver 15 y 16.

3. Expresar potencias como raíces y viceversa. [G2].

M: ¿Cómo puede expresarse $2^3 = 8$ como una raíz?, ¿y $(-2)^3 = -8$?

RP: $\sqrt[3]{8} = 2$ y $\sqrt[3]{-8} = -2$

* Concluir que a la base 2 y -2 se la llama raíz cúbica de 8 y -8 respectivamente.

M: Calculen 5^3 y escríbanlo como una raíz.

RP: $5^3 = 125$; $\sqrt[3]{125} = 5$

M: ¿Cómo puede expresarse $\sqrt[3]{27} = 3$ como potencia?

RP: $3^3 = 27$

4. Resolver 17.

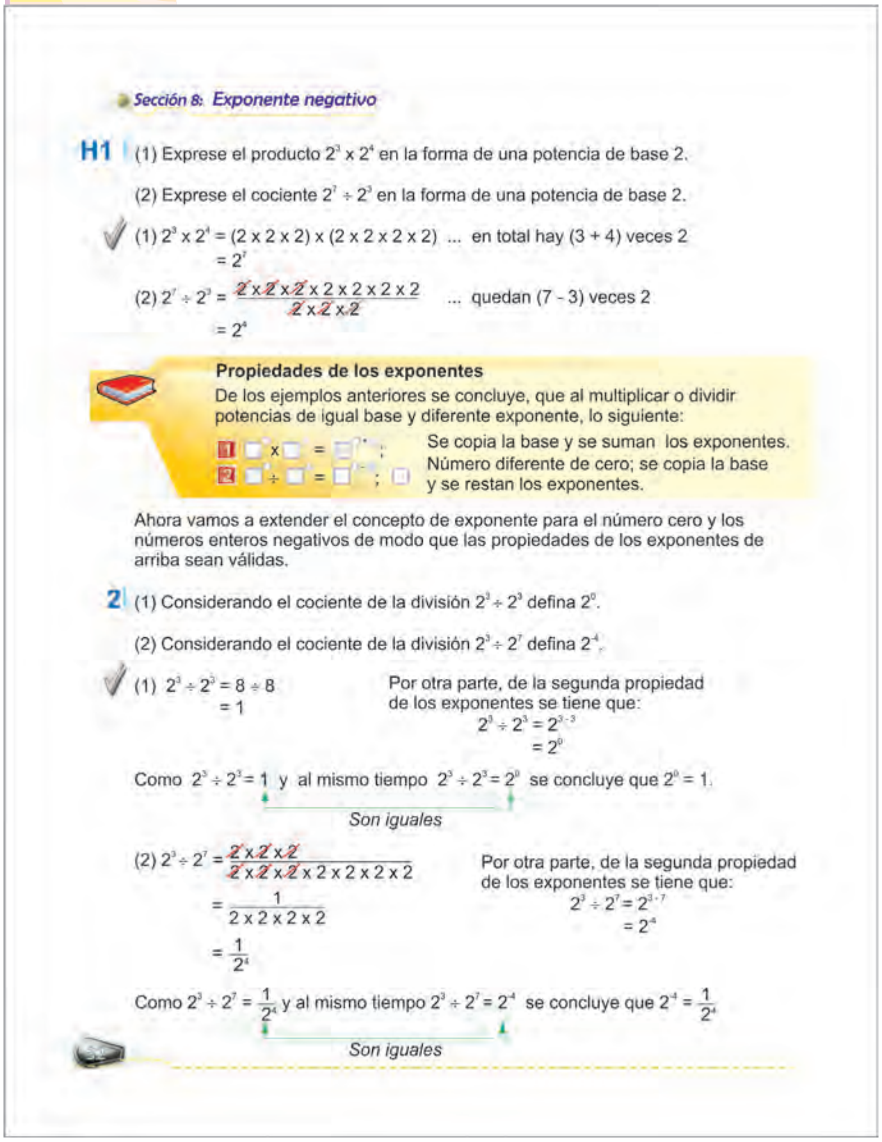
Lección 3: (14/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo:

- Conocer la manera de calcular potencias con exponente cero o negativo.

Materiales:



Sección 8: Exponente negativo

H1 (1) Exprese el producto $2^3 \times 2^4$ en la forma de una potencia de base 2.

(2) Exprese el cociente $2^7 \div 2^3$ en la forma de una potencia de base 2.

(1) $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$ ... en total hay (3 + 4) veces 2
$= 2^7$

(2) $2^7 \div 2^3 = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}$ ... quedan (7 - 3) veces 2
$= 2^4$

Propiedades de los exponentes

De los ejemplos anteriores se concluye, que al multiplicar o dividir potencias de igual base y diferente exponente, lo siguiente:

1 □ x □ = □ ; Se copia la base y se suman los exponentes.
2 □ ÷ □ = □ ; □ Número diferente de cero; se copia la base y se restan los exponentes.

Ahora vamos a extender el concepto de exponente para el número cero y los números enteros negativos de modo que las propiedades de los exponentes de arriba sean válidas.

2 (1) Considerando el cociente de la división $2^3 \div 2^3$ defina 2^0.

(2) Considerando el cociente de la división $2^3 \div 2^7$ defina 2^{-4}.

(1) $2^3 \div 2^3 = 8 \div 8$
$= 1$

Por otra parte, de la segunda propiedad de los exponentes se tiene que:
$2^3 \div 2^3 = 2^{3-3}$
$= 2^0$

Como $2^3 \div 2^3 = 1$ y al mismo tiempo $2^3 \div 2^3 = 2^0$ se concluye que $2^0 = 1$.

Son iguales

(2) $2^3 \div 2^7 = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$
$= \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$
$= \frac{1}{2^4}$

Por otra parte, de la segunda propiedad de los exponentes se tiene que:
$2^3 \div 2^7 = 2^{3-7}$
$= 2^{-4}$

Como $2^3 \div 2^7 = \frac{1}{2^4}$ y al mismo tiempo $2^3 \div 2^7 = 2^{-4}$ se concluye que $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

Son iguales

1. **Escribir un producto de potencias de igual base como una sola potencia. [H1]**

M: Exprese 2^3, 2^4 y $2^3 \times 2^4$ como una multiplicación de 2.

RP: 2 x 2 x 2; 2 x 2 x 2 x 2 y (2 x 2 x 2) x (2 x 2 x 2 x 2)

M: Si $2^3 \times 2^4$ = (2 x 2 x 2) x (2 x 2 x 2 x 2) ¿Cómo se puede escribir este producto como una sola potencia?

RP: 2^7

M: ¿Con estos resultados qué podemos concluir?

RP: Que $2^3 \times 2^4 = 2^7$.

M: ¿Qué pasa con la base común y los exponentes?

RP: Se escribe la base común y se suman los exponentes.

2. **Escribir un cociente de potencias de igual base como una sola potencia.**

* Desarrollarlo en forma similar al anterior.

3. **Definir la potencia de exponente cero. [H2 (1)]**

M: ¿Cuál es el cociente en $2^3 \div 2^3$?

* Si no surgen ideas, pídales que desarrollen las potencias y dividan los resultados.

RP: 8 ÷ 8 = 1

M: ¿Cuál es el resultado de $2^3 \div 2^3$ al aplicar la segunda propiedad vista anteriormente?

RP: $2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$

M: Si $2^3 \div 2^3 = 1$ y $2^3 \div 2^3 = 2^0$ ¿qué podemos concluir?

RP: Que $2^0 = 1$

4. **Definir la potencia de exponente negativo. [H2 (2)]**

* Desarrollar (2) como se presenta en el LE para concluir que $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

Lección 3: (15/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Calcular potencias con exponente cero o negativo.

Materiales:

Para cualquier número diferente de cero, se define:

(1) $\square^{0} = 1$ Ejemplo: $5^3 \div 5^3 = 1$, por otra parte $5^3 \div 5^3 = 5^{3-3} = 5^0$

(2) $\square^{-\triangle} = \dfrac{1}{\square^{\triangle}}$ Ejemplo: $5^0 \div 5^3 = 1 \div 5^3 = \dfrac{1}{5^3}$, por otra parte $5^0 \div 5^3 = 5^{0-3} = 5^{-3}$

3 Ejemplos.

(1) $5^0 = 1$ (2) $(-5)^0 = 1$ (3) $-5^0 = -1$

(4) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

(5) $(-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = \dfrac{1}{-125} = -\dfrac{1}{125}$

(6) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3} = 1 \div \left(-\dfrac{2}{5}\right)^3 = 1 \div \left(-\dfrac{8}{125}\right) = 1 \times \left(-\dfrac{125}{8}\right) = -\dfrac{125}{8}$

18 Desarrolle las siguientes potencias.

(1) 4^0 **1** (2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ **1** (3) $(-6)^0$ **1**

(4) -6^0 **-1** (5) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^0$ **1** (6) $(0.3)^0$ **1**

(7) $(-5.1)^0$ **1** (8) -5.1^0 **-1** (9) 5^{-2} $\dfrac{1}{25}$

(10) $(0.4)^{-1}$ **2.5** (11) $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$ $\dfrac{4}{9}$ (12) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$ **125**

(13) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$ $\dfrac{25}{9}$ (14) $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^{-3}$ $-\dfrac{64}{125}$ (15) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$ **81**

1. **Analizar las potencias de exponente cero y negativo.**

M: Comparen las propiedades del resumen con las respuestas obtenidas en la clase anterior, ¿qué observan?

RP: Que se parecen en su forma.

M: ¿Por qué se dice que la base es distinta de cero?

* Explicar por qué el número cero no puede estar en la casilla (cero no puede ser base).
* Observar el siguiente ejemplo: $0^{-3} = \dfrac{1}{0^3} = \dfrac{1}{0}$ esto es imposible.
* Hacer énfasis en la lectura de las propiedades, por ejemplo, un número elevado a la cero es igual a uno ($\square^0 = 1$).
* En las potencias de exponente negativo tener el cuidado de expresarlas con un 1 en el numerador y con exponente positivo en el denominador

2. **Calcular potencias de exponente cero y negativo. [H3]**

* Desarrollar estos ejercicios como se plantean en el LE utilizando lo visto anteriormente.

3. **Resolver 18 .**

1. Expresar una potencia de exponente negativo con exponente positivo. [H4]

M: Calculen $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$

¿Cómo son los resultados obtenidos?

RP: Iguales.

M: ¿Qué podemos concluir?

* Concluir que una potencia con exponente negativo se puede expresar con exponente positivo.
* Desarrollar (2) en forma similar.
* En la potencia de exponente negativo se aplica la propiedad aprendida y en la de exponente positivo la definición de potenciación.

2. Encontrar las propiedades del resumen.

M: ¿Cómo son las fracciones utilizadas?

RP: Son recíprocas.

* Hacer que los estudiantes se den cuenta que las fracciones son recíprocas entre sí.
* Esta propiedad se explica así:

$$\left(\frac{\square}{\triangle}\right)^{-0} = \left\{\left(\frac{\square}{\triangle}\right)^{-1}\right\}^{0} = \left(\frac{\triangle}{\square}\right)^{0}$$

M: ¿Por qué se dice que tanto el numerador como el denominador deben ser distintos de cero?

* Explicar que el cero no puede tomar estos valores porque no está definida la división entre cero.

3. Resolver 19.

Lección 3: (16/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Escribir una potencia de exponente negativo en su equivalente de exponente positivo.

Materiales:

4 Compare el resultado de: (1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ (2) $(0.4)^{-2}$ y $\left(\frac{1}{0.4}\right)^{2}$

(1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}} = \frac{1}{\frac{27}{8}} = 1 \div \frac{27}{8} = 1 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27}$

Como $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{8}{27}$ y al mismo tiempo $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27}$ se concluye que $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$

Son iguales

(2) $(0.4)^{-2} = \frac{1}{0.4^2} = \frac{1}{0.16} = \frac{1 \times 100}{0.16 \times 100} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6.25$

$\left(\frac{1}{0.4}\right)^{2} = \left(\frac{1 \times 10}{0.4 \times 10}\right)^{2} = \left(\frac{10}{4}\right)^{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{4} = 6.25$

Como $(0.4)^{-2} = 6.25$ y además $\left(\frac{1}{0.4}\right)^{2} = 6.25$ se concluye que $(0.4)^{-2} = \left(\frac{1}{0.4}\right)^{2}$

De los ejemplos anteriores se concluye que:

$\left(\frac{\square}{\triangle}\right)^{-} = \left(\frac{\triangle}{\square}\right)$; $\square$ y $\triangle$ diferentes de 0

19 Escriba las siguientes potencias con exponente positivo y resuélvalas.

(1) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ $\left(-\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\left(\frac{2}{1}\right)^{3} = 8$ (3) $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$ $\left(\frac{7}{2}\right)^{2} = \frac{4}{49}$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$ $\left(\frac{8}{1}\right)^{3} = 512$ (5) $(0.6)^{-3}$ $\left(\frac{1}{0.6}\right)^{3} = \frac{125}{27} = 4.629...$ (6) $(0.8)^{-2}$ $\left(\frac{1}{0.8}\right)^{2} = \frac{25}{16} = 1.5625$

Lección 2: (17/20)

Adición y sustracción de números positivos y negativos

Objetivo: • Eliminar los paréntesis de un PO sólo con adición y calcularlo.

Materiales:

Sección 9: Adición y sustracción combinadas

I 1 Un PO sólo con adición por lo general se representa sin paréntesis.

Ejemplo $(-4) + 2 + (-3) = -4 + 2 - 3$

Notas: No hay que eliminar paréntesis con números negativos en el multiplicación ni en la división; ejemplo $3 \times (-5)$ correcto; 3×-5 incorrecto.

20 Exprese sin paréntesis los siguientes PO.

(1) $3 + (-5) + 8 + (-1)$ $3 - 5 + 8 - 1$

(2) $(-8) + (-1) + (-11) + 25$ $-8 - 1 - 11 + 25$

(3) $4 + (-5) + (-6) + 7$ $4 - 5 - 6 + 7$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{7}{6}\right)$ $-\frac{1}{3} + \frac{5}{4} - \frac{1}{8} - \frac{7}{6}$

(5) $\frac{1}{9} + \frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$ $\frac{1}{9} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} - \frac{1}{3}$

(6) $13 + (-5.1) + (-3.8) + 2.5$ $13 - 5.1 - 3.8 + 2.5$

(7) $(-8.3) + 3.8 + (-10.3) + 9.9$ $-8.3 + 3.8 - 10.3 + 9.9$

21 Convierta los siguientes PO a PO sólo con adición usando paréntesis.

(1) $2 - 5 + 3$ $2 + (-5) + 3$

(2) $-8 + 6 - 5$ $(-8) + 6 + (-5)$

(3) $4 - 5 + 6 - 7$ $4 + (-5) + 6 + (-7)$

(4) $-8 - 1 - 11 + 25$ $(-8) + (-1) + (-11) + 25$

(5) $\frac{3}{5} - \frac{7}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ $\frac{3}{5} + \left(-\frac{7}{8}\right) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)$

(6) $-\frac{5}{4} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ $\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{5}{6}$

(7) $1.3 - 5.4 + 7.3 - 0.8$ $1.3 + (-5.4) + 7.3 + (-0.8)$

(8) $-7.4 + 9.3 - 11.1 + 2.3$ $(-7.4) + 9.3 + (-11.1) + 2.3$

2 En caso de un PO sin paréntesis se suma y se resta separadamente.

Ejemplo:

$-3 + 6 + 5 - 7 = 6 + 5 - 3 - 7$ .... Primero se suma 6 y 5, y luego -3 y -7

$= 11 - 10$

$= 1$ .... Se omite el signo positivo en la respuesta

22 Calcule.

(1) $7 - 9 + 2$ 0

(2) $4 - 5 - 6 + 7$ 0

(3) $-8 - 1 - 11 + 25$ 5

(4) $15 - 13 + 13 + 18 - 7$ 26

(5) $-\frac{1}{4} + \frac{5}{8} - \frac{3}{2} + \frac{9}{8}$ 0

(6) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ $\frac{13}{60}$

(7) $1.3 + 4.1 - 5.8 - 0.7$ -1.1

(8) $-8.3 + 9.4 - 5.5 + 7.3$ 2.9

3 Ejemplo

$3 - (-2) + 5 + (-13) = 3 + 2 + 5 - 13$ ..... Se convierte $3 - (-2)$ en $3 + (+2) = 3 + 2$

$= 10 - 13$

$= -3$

23 Convierta los siguientes PO en PO sin paréntesis y calcule.

(1) $3 - 5 + 8 - (-9)$ $3 - 5 + 8 + 9 = 15$

(2) $(-1.3) + (+5.1) - (-2.3) + 6.2$ $-1.3 + 5.1 + 2.3 + 6.2 = 12.3$

(3) $4 - 3.3 + 5 + (-2.9)$ $4 - 3.3 + 5 - 2.9 = 2.8$

(4) $+\frac{3}{5} + \frac{7}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right)$ $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$

(5) $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ $-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{4}$

(6) $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{12}\right)$ $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 0$

(7) $(-3.4) - (-6.7) + (-5.3) + (-8.1)$ $-3.4 + 6.7 - 5.3 - 8.1 = -10.1$

35

1. Eliminar paréntesis en un PO sólo con adición. [I1]

* Indicar que en un PO solo con adición se omiten los paréntesis.

M: Escriban (-4) + 2 + (-3) sin paréntesis.

RP: -4 + 2 - 3

2. Resolver 20 y 21.

* Señalar que no hay usar paréntesis con números negativos en la multiplicación ni en la división.

* Desarrollar algunos ejercicios en clase y dejar los otros de tarea.

3. Calcular el PO. [I2]

M: ¿Cuál es el resultado de -3 + 6 + 5 -7?

RP: 1

M: ¿Cómo lo hicieron?

RP: Sumamos primero los números positivos y después los negativos. Luego sumamos los dos resultados.

* Explicar el desarrollo del cálculo en la pizarra.

4. Resolver 22.

5. Calcular el PO. [I3]

* Desarrollar en forma similar al anterior.

6. Resolver 23.

* Señalar que no hay usar paréntesis con números negativos en la multiplicación ni en la división.

* Desarrollar algunos ejercicios en clase y dejar los otros de tarea.

1. Convertir en un PO sólo con multiplicación. [J1]

M: ¿Cuál es el resultado de $\frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{8}{15}$?

RP: -1

M: Exprese el PO anterior sólo con multiplicaciones y calcule.

RP: $\frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{15}{8}$

M: ¿Cómo son los resultados anteriores?

RP: Son iguales, son equivalentes.

* Concluir que un PO con multiplicaciones y divisiones puede convertirse en un PO sólo con multiplicaciones.

2. Resolver 24.

3. Resolver un PO que tiene las 4 operaciones básicas. [J2]

* Confirmar en el desarrollo de la jerarquía de las operaciones básicas.

* Desarrollar $7 \times 3 + 48 \div 6$ de acuerdo a la jerarquía de las operaciones.

4. Resolver 25.

5. Resolver un PO con potencias y raíces además de las operaciones básicas. [J3]

* Orientar en el desarrollo de la jerarquía de un PO con potencias, raíces y operaciones básicas.

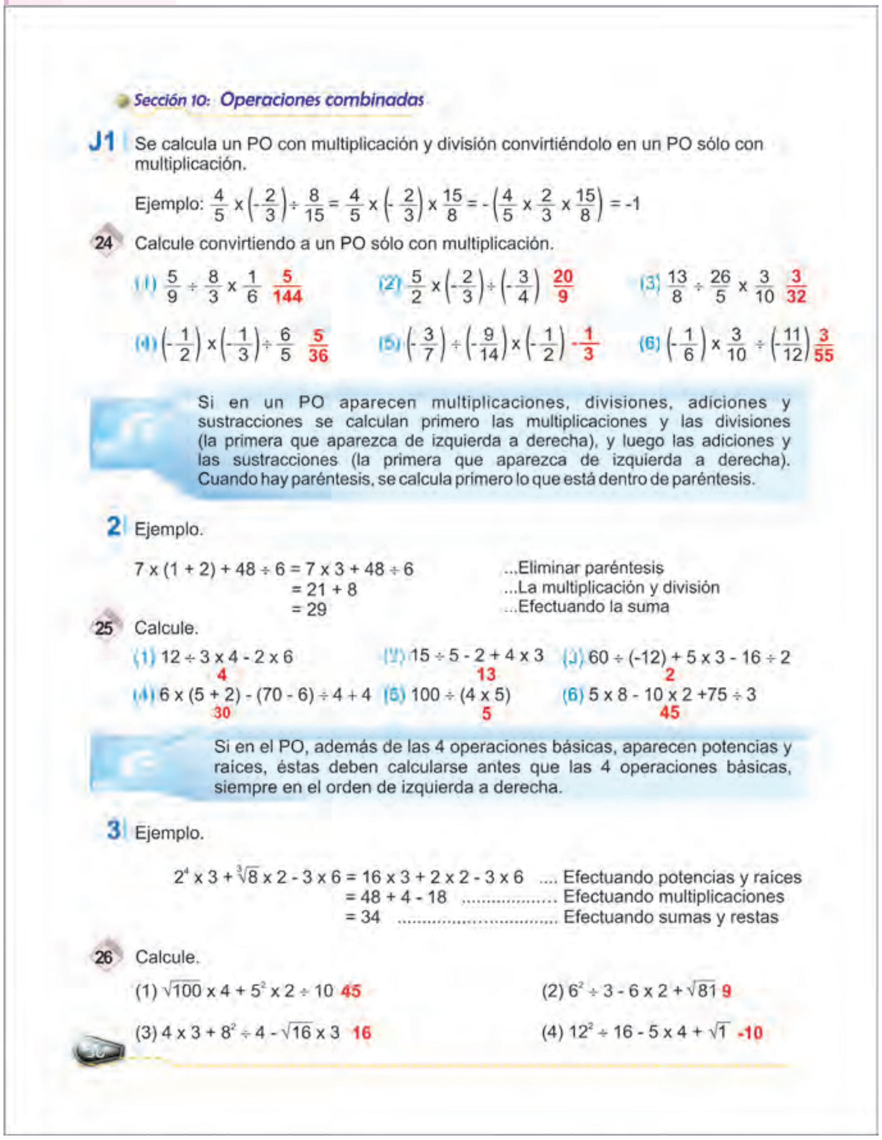
* Desarrollar $2^4 \times 3 + \sqrt[3]{8} \times 2 - 3 \times 6$ de acuerdo a la jerarquía de las operaciones.

6. Resolver 26.

Lección 3: (18/20) Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Calcular operaciones combinadas siguiendo la jerarquía de las operaciones.

Materiales:



Sección 10: Operaciones combinadas

J1 Se calcula un PO con multiplicación y división convirtiéndolo en un PO sólo con multiplicación.

Ejemplo: $\frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{8}{15} = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{15}{8} = -\left(\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{15}{8}\right) = -1$

24 Calcule convirtiendo a un PO sólo con multiplicación.

(1) $\frac{5}{9} \div \frac{8}{3} \times \frac{1}{6}$ $\frac{5}{144}$ (2) $\frac{5}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right)$ $\frac{20}{9}$ (3) $\frac{13}{8} \div \frac{26}{5} \times \frac{3}{10}$ $\frac{3}{32}$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \div \frac{6}{5}$ $\frac{5}{36}$ (5) $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \left(-\frac{9}{14}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{1}{3}$ (6) $\left(-\frac{1}{6}\right) \times \frac{3}{10} \div \left(-\frac{11}{12}\right)$ $\frac{3}{55}$

Si en un PO aparecen multiplicaciones, divisiones, adiciones y sustracciones se calculan primero las multiplicaciones y las divisiones (la primera que aparezca de izquierda a derecha), y luego las adiciones y las sustracciones (la primera que aparezca de izquierda a derecha). Cuando hay paréntesis, se calcula primero lo que está dentro de paréntesis.

2 Ejemplo.

$7 \times (1 + 2) + 48 \div 6 = 7 \times 3 + 48 \div 6$ ...Eliminar paréntesis
$= 21 + 8$ ...La multiplicación y división
$= 29$ ...Efectuando la suma

25 Calcule.

(1) $12 \div 3 \times 4 - 2 \times 6$ **4** (2) $15 \div 5 - 2 + 4 \times 3$ **13** (3) $60 \div (-12) + 5 \times 3 - 16 \div 2$ **2**

(4) $6 \times (5 + 2) - (70 - 6) \div 4 + 4$ **30** (5) $100 \div (4 \times 5)$ **5** (6) $5 \times 8 - 10 \times 2 + 75 \div 3$ **45**

Si en el PO, además de las 4 operaciones básicas, aparecen potencias y raíces, éstas deben calcularse antes que las 4 operaciones básicas, siempre en el orden de izquierda a derecha.

3 Ejemplo.

$2^4 \times 3 + \sqrt[3]{8} \times 2 - 3 \times 6 = 16 \times 3 + 2 \times 2 - 3 \times 6$ .... Efectuando potencias y raíces
$= 48 + 4 - 18$ .... Efectuando multiplicaciones
$= 34$ .... Efectuando sumas y restas

26 Calcule.

(1) $\sqrt{100} \times 4 + 5^2 \times 2 \div 10$ **45** (2) $6^2 \div 3 - 6 \times 2 + \sqrt{81}$ **9**

(3) $4 \times 3 + 8^2 \div 4 - \sqrt{16} \times 3$ **16** (4) $12^2 \div 16 - 5 \times 4 + \sqrt{1}$ **-10**

Lección 3: **(19/20)**

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo: • Aplicar la propiedad distributiva.

Materiales:

Sección 11: Propiedad distributiva

K1 Compare el resultado de: (1) $(-7 + 5) \times (-4)$ y $(-7) \times (-4) + 5 \times (-4)$

(2) $0.2 \times (-1.1 + 3)$ y $0.2 \times (-1.1) + 0.2 \times 3$

(3) $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)$ y $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}$

(1) $(-7 + 5) \times (-4) = (-2) \times (-4) = 8$ $\quad$ $(-7) \times (-4) + 5 \times (-4) = 28 + (-20) = 8$

(2) $0.2 \times (-1.1 + 3) = 0.2 \times 1.9 = 0.38$ $\quad$ $0.2 \times (-1.1) + 0.2 \times 3 = -0.22 + 0.6 = 0.38$

(3) $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

Para los casos (1) ~ (3) los resultados son iguales.

La propiedad distributiva es válida con números positivos y negativos.

(□ + ○) x △ = □ x △ + ○ x △

○ x (□ + △) = ○ x □ + ○ x △

2 Aplicando la propiedad distributiva hay casos en que se puede calcular fácilmente.

Ejemplo: $1.8 \times 13 + 0.2 \times 13 = (1.8 + 0.2) \times 13 = 2 \times 13 = 26$

27 Calcule aplicando la propiedad distributiva.

(1) $6.2 \times 3.4 - 1.2 \times 3.4$ — 17

(2) $1.8 \times (-4) + 0.2 \times 4$ — -6.4

(3) $17 \times \frac{5}{6} + 17 \times \frac{7}{6}$ — 34

(4) $\frac{9}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{2}{7} \times \frac{3}{5}$ — $\frac{3}{5}$

1. Confirmar la propiedad distributiva. [K1]

M: Calculen (-7 + 5) x (-4) y (-7) x (-4) + 5 x (-4). ¿Cómo son los resultados obtenidos?

* Tener el cuidado que los estudiantes resuelvan primero lo que está entre paréntesis y después la otra operación.

RP: Iguales.

* Desarrollar (2) y (3) en forma similar.

M: ¿Qué podemos concluir?

* Concluir sobre la propiedad distributiva.

* Indicar que diferencien entre las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

2. Aplicar la propiedad distributiva. [K2]

3. Resolver 27.

1. Resolver el problema. [L1].

* Presentar el problema y discutir sobre él.

M: ¿Qué podemos hacer para resolver este problema?

* Si surge la idea de aplicar la media debe aprovecharse, sin embargo el concepto que se está trabajando es el de los números negativos por lo que se espera que utilicen la suma de las diferencias de los pesos con respecto al peso dado. Si la suma es negativa el elevador tiene capacidad para 8 personas y si es positiva no tiene capacidad.

2. Resolver el problema. [L2].

* Inducir a los estudiantes que utilicen la estrategia de calcular el agua que entra (600 + 15 x 20) menos la que se gasta (40 x 20) en el lapso de 20 minutos. La segunda forma de resolución no es tan fácil de percibirla, pero se puede inducir proponiéndoles que calculen el agua que se pierde por minuto y extrapolándola a 20 minutos y que esta cantidad se la resten a la cantidad de agua que había.

3. Resolver 28.

Lección 3: (20/20)

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Objetivo:

- Resolver problemas de la vida real utilizando el concepto de número negativo.

Materiales:

Sección 12: Aplicación de los números negativos

L1 La cantidad de personas que se permiten en un elevador se calcula suponiendo que el peso de una persona es 70 Kg. Averigüe si en un elevador con capacidad para 8 personas pueden entrar 8 personas cuyos pesos son los siguientes:

78 Kg, 65 Kg, 67 Kg, 58 Kg, 70 Kg, 72 Kg, 64 Kg, 83 Kg

Se representa el peso de cada persona tomando 70 Kg como punto de referencia. De esto se obtienen los siguientes datos:

8 Kg, -5 Kg, -3 Kg, -12 Kg, 0 Kg, 2 Kg, -6 Kg, 13 Kg

La suma de estos es: 8 + (-5) + (-3) + (-12) + 0 + 2 + (-6) + 13 = -3.

Esto significa que el peso total es 3 Kg menos que el límite.

R: Sí pueden entrar.

2 A un tanque que tiene 600 ℓ de agua le agregan 15 ℓ por minuto, pero al mismo tiempo gastan 40 ℓ por minuto para el regadío de la finca. ¿Cuántos litros de agua hay al pasar 20 minutos?

Al tanque se le agregan 15 x 20 = 300 (ℓ) y gasta 40 x 20 = 800 ℓ

Al pasar 20 minutos quedan:
600 + 300 - 800 = 100 (ℓ)

R: 100 ℓ

Otra solución: Por cada minuto que pasa el tanque pierde 25 ℓ pues 15 - 40 = -25 (ℓ).

En 20 minutos pierde 500 ℓ porque -25 x 20 = -500 (ℓ).
Quedan entonces
600 - 500 = 100 (ℓ)

R: 100 ℓ



28 (1) En una caja donde se colocan manzanas se toma 150 g como el peso medio de ellas. Si se tienen los siguientes pesos de las manzanas: 146 g, 153 g, 157 g, 148 g, 144 g y 155 g. ¿Se podrán colocar en la caja las 6 manzanas?
PO: -4 + 3 + 7 - 2 - 6 + 5 = 3 R: No

(2) Para que un alumno apruebe una asignatura necesita un promedio mínimo de 60. Un alumno obtuvo las cuatro calificaciones siguientes: 54, 70, 60 y 56. ¿Aprobó la asignatura?
PO: -6 + 10 + 0 -4 = 0 R: Si

(3) En L2 cuánta agua hay al pasar 15 minutos si se vierten 20 ℓ por minuto y se gastan 30 ℓ por minuto.
PO: 100 + 20 x 15 - 30 x 15 = 450 R: 150 ℓ

Unidad 1: (1~2/2) Números positivos y negativos

Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre los números positivos y negativos.

Materiales:

Ejercicios

1 ¿Qué temperatura marcan los termómetros?

Ayer  **-2 °C** Hoy  **-6 °C**

2 Exprese las siguientes situaciones con números positivos o negativos.

(1) Si se expresa 7º C más alto que 0º C con + 7º, ¿Cómo se expresa 10º C más bajo que 0º C? **-10 °C**

(2) Si se expresa 1500 m de altura con + 1500 m, ¿Cómo se expresa 700 m de profundidad? **-700 m**

(3) Si se expresa 5 Km al oeste desde el punto O con - 5 Km, ¿Cómo se expresa 300 m al este del punto O? **+300 m**

(4) Si se expresa 670 m al Norte desde el punto O con + 670 m, ¿Cómo se expresa 2 Km al Sur desde el punto O? **-2 Km**

(5) Si se expresa 2 días antes de ahora con - 2 días, ¿Cómo se expresa 1 semana después de ahora? **+1 Semana**

(6) Si se expresa 20 horas de transcurso al pasado con -20 horas ¿Cómo se expresa 5 días de transcurso? **+5 dias**

3 ¿Qué otras situaciones conoce con las cuales se pueda explicar el sentido de los números negativos y positivos? **Se omite la solución**

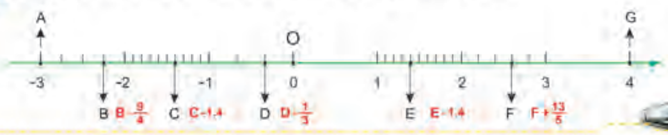
4 Exprese los siguientes números con signo positivo o negativo.

(1) 5 mayor que cero **+5** (2) 8 menor que cero **-8**

(3) $\frac{4}{3}$ menor que cero $-\frac{4}{3}$ (4) $\frac{5}{8}$ mayor que cero $+\frac{5}{8}$

(5) 0.8 mayor que cero **+0.8** (6) 1.4 menor que cero **-1.4**

5 Escriba los números que corresponden a los siguientes puntos.



B $-\frac{9}{4}$ C -1.4 D $-\frac{1}{3}$ E 1.4 F $+\frac{13}{5}$

39

1. **Resolver** 1 ~ 24 .

* En esta sección cuando se hable de números se sobre-entiende que abarca a los positivos y a los negativos.

Tipos de ejercicios:

1 Escritura y cálculo de temperaturas con números.

2 Expresión de situaciones con números.

3 Otras situaciones donde se utilizan los números.

4 Expresión de números tomando el cero como referencia.

5 Representación de números en la recta numérica.

* En las respuestas se puede omitir el signo “**+**” de los números positivos.

6 Representación de números en la recta numérica

7 Relaciones de orden en los números.

8 Adición de números.

9 Sustracción de números.

10 Expresión y cálculo de un PO sólo con adición de números.

* En 10 (1) se pueden omitir los paréntesis en el primer término.

Unidad 1: (1~2/2)

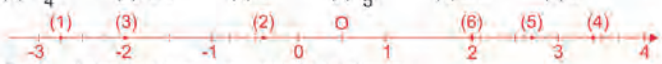
Números positivos y negativos

Ejercicios de la unidad

[Continuación]

6 Grafique en una recta numérica los siguientes números.

(1) $-\frac{11}{4}$ (2) -0.4 (3) -2 (4) $\frac{17}{5}$ (5) 2.7 (6) 2



7 Escriba el signo < ó > para cada pareja de números.

(1) $-\frac{1}{2}$ < 0 (2) 0 > $-\frac{2}{3}$ (3) -0.4 > -1.3 (4) -34 > -63

(5) $-\frac{3}{4}$ > $-\frac{8}{3}$ (6) $\frac{3}{4}$ < $\frac{9}{8}$ (7) 0 < $\frac{9}{8}$ (8) $\frac{11}{7}$ > $-\frac{3}{4}$

8 Calcule.

(1) 4 + (-9) **-5** (2) (-15) + 23 **8** (3) (-1) + (-10) **-11**

(4) 23 + 63 **86** (5) 1.3 + (-4.9) **- 3.6** (6) (-14.1) + 23.6 **9.5**

(7) 18.7 + 13.8 **32.5** (8) (-11.2) + (-25.9) **-37.1** (9) $\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)$ $-\frac{7}{4}$

(10) $\frac{5}{6} + \frac{7}{72}$ $\frac{67}{72}$ (11) $\frac{7}{8} + \left(-\frac{5}{12}\right)$ $\frac{11}{24}$ (12) $\left(-\frac{9}{10}\right)+\frac{1}{5}$ $-\frac{7}{10}$

9 Calcule.

(1) 23 - 36 **-13** (2) (-15) - 23 **-38** (3) (-5) - (-10) **5**

(4) 24 - (-8) **32** (5) 1.3 - (-5.7) **7** (6) $\frac{1}{2} - 0$ $\frac{1}{2}$

(7) $0 - \left(-\frac{3}{4}\right)$ $\frac{3}{4}$ (8) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{5}\right)$ $\frac{22}{15}$ (9) $6 - \left(-\frac{2}{3}\right)$ $\frac{20}{3}$

10 Plantee como un PO sólo con adición y calcule.

(1) -51 - 23 + (-4) - (-3)   **-51 + (-23) + (-4) +3 = -75**

(2) $\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{5}$

(3) 1.1 - 3.4 + (-7.9) - (-4.3)   **1.1 + (-3.4) + (-7.9) +4.3 = -5.9**

Unidad 1: (1~2/2)

Números positivos y negativos

Ejercicios de la unidad

[Continuación]

11 Expresión y cálculo de un PO sólo con adición de números.

12 Multiplicación de números.

13 Determinación del signo de una potencia.

14 Equivalencia de la potenciación como radicación.

15 Equivalencia de la radicación como potenciación.

16 División de números.

---

11 Exprese sin paréntesis los siguientes PO y calcule.

(1) $-1.5-(-3.9)+7.3-6.8$ $\quad -1.5+3.9+7.3-6.8=2.9$

(2) $5+4-(-11)+(-15)$ $\quad 5+4+11-15=5$

(3) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{3}$ $\quad -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{127}{60}$

(4) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)$ $\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{23}{20}$

(5) $-3+5-(-9)+(-23)$ $\quad -3+5+9-23=-12$

(6) $(-3.4)-(-7.4)-8.5-(-9.3)$ $\quad -3.4+7.4-8.5+9.3=4.8$

12 Calcule.

(1) $(-3)\times(-8)\times(-3)$ $\quad -72$

(2) $3\times(-4)$ $\quad -12$

(3) $\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{10}{7}\right)$ $\quad -\frac{4}{7}$

(4) $0.4\times(-3.1)\times(2.2)$ $\quad -2.728$

(5) $(3.4)\times(-1.1)\times(-8)$ $\quad 29.92$

(6) $\left(-\frac{4}{9}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$ $\quad \frac{2}{3}$

13 ¿Qué signo tienen las siguientes potencias?

(1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ $+$ (2) $(-1.3)^3$ $-$ (3) $(-8)^2$ $+$ (4) $(-10.1)^5$ $-$

14 Escriba el equivalente de la expresión como raíz.

(1) $2.3^2=5.29$ $\quad \sqrt{5.29}=2.3$

(2) $-2.197=(-1.3)^3$ $\quad \sqrt[3]{-2.197}=-1.3$

(3) $16^2=256$ $\quad \sqrt{256}=16$

(4) $6^3=216$ $\quad \sqrt[3]{216}=6$

(5) $45^2=2025$ $\quad \sqrt{2025}=45$

(6) $(-8)^3=-512$ $\quad \sqrt[3]{-512}=-8$

(7) $6.3^2=39.69$ $\quad \sqrt{39.69}=6.3$

(8) $(-1.4)^3=-2.744$ $\quad \sqrt[3]{-2.744}=-1.4$

15 Escriba el equivalente de la expresión como potencia.

(1) $\sqrt{26.01}=5.1$ $\quad 5.1^2=26.01$

(2) $\sqrt[3]{729}=9$ $\quad 9^3=729$

(3) $\sqrt{6724}=82$ $\quad 82^2=6724$

(4) $\sqrt[3]{-1728}=-12$ $\quad (-12)^3=-1728$

16 Calcule.

(1) $(-630)\div(-15)$ $\quad 42$

(2) $32.4\div 6$ $\quad +5.4$

(3) $(-768)\div 32$ $\quad -24$

(4) $\frac{1}{5}\div\left(-\frac{5}{4}\right)$ $\quad -\frac{4}{25}$

(5) $(-56.4)\div 8$ $\quad -7.05$

(6) $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{8}{15}\right)$ $\quad \frac{45}{32}$

(7) $900\div(-30)$ $\quad -30$

(8) $(-100)\div 0.1$ $\quad -1000$

(9) $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad -\frac{6}{5}$

41

17 Evaluación de fracciones complejas.

18 División de números utilizando el recíproco.

19 Operaciones combinadas.

20 Expresión y cálculo de un PO sólo con multiplicación.

21 Cálculo de potencias.

22 Expresión de potencias con exponente negativo a positivo.

23 Resolución de problemas empleando un PO con multiplicación.

* Como la dirección positiva se puede definir arbitrariamente puede ser:

90 x 3 = 270

También es válido en el PO del (2)

-80 x (4-3) = -80

80 x (-4+3) = -80

24 Resolución de problemas.

Unidad 1: (1~2/2)

Números positivos y negativos

Ejercicios de la unidad

[Continuación]

Materiales:

17 Calcule.

(1) $\dfrac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{9}}$ $\frac{9}{4}$ (2) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}$ 4 (3) $\dfrac{\frac{13}{5}}{\frac{13}{5}}$ 1

18 Calcule utilizando el reciproco.

(1) $5 \div 2$ $\frac{5}{2}$ (2) $\left(-\frac{1}{3}\right) \div \frac{5}{6}$ $-\frac{2}{5}$ (3) $0.8 \div 2$ 0.4

(4) $(-210) \div 42$ -5 (5) $\frac{5}{8} \div \left(-\frac{15}{4}\right)$ $-\frac{1}{6}$ (6) $\left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right)$ 1

19 Calcule.

(1) $(-184) \div 23 + (-5) \times (-12)$ 52 (2) $\sqrt[3]{-64} \times (-5) + (-8)^2 \div 16$ 24 (3) $15 - (238 \div 14 - 20)$ 18

20 Convierta a un PO sólo con multiplicación y calcule.

(1) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$ (2) $\frac{2}{5} \div \frac{5}{2} \times \frac{5}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{14}{15}$

21 Calcule las siguientes potencias.

(1) $(-1)^0$ 1 (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 27 (3) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $\frac{16}{25}$ (4) $\left(-\frac{3}{2}\right)^0$ 1 (5) $(4)^{-3}$ $\frac{1}{64}$

22 Cambie los exponentes negativos a positivos.

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\left(\frac{3}{1}\right)^2$ (2) $(7)^{-3}$ $\frac{1}{7^3}$ (3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$ $\left(-\frac{3}{1}\right)^4$

23 Resuelva empleando un PO con multiplicación.

(1) ¿Cuánto se ahorra un aficionado del fútbol si deja de ir al estadio 3 veces y la entrada tiene un costo de 90 Lempiras?

PO: (-90) × (-3) = +270 R: Se ahorra Lempiras 270

(2) Un carro sale de un lugar y se dirige hacia el este durante 3 horas. Después regresa hacia el Oeste en línea recta durante 4 horas. El carro mantuvo la velocidad constante durante todo el recorrido a 80 Km por hora. ¿Cuál es la posición del carro en relación al lugar de partida?

PO: 80 × 3 + (-80) × 4 = -80 R: 80 km al Oeste

24 Resuelva.

(1) A las 6 pm el termómetro marcaba 4° C. Al día siguiente a las 2 am la temperatura descendió 10° C. ¿Cuál temperatura marcó el termómetro a las 2 am?

PO: 4 - 10 = -6 R: 6 °C bajo cero

Números positivos y negativos

Evaluación de la unidad

1. Resolver 1.

Continúa en la siguiente página...

Evaluación

1 Escriba si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

(1) Las temperaturas positivas son más altas que 0º C. (V)

(2) Si ayer la temperatura era de 25º C y hoy es de 29º C entonces hubo un cambio negativo de temperatura. (F)

(3) -5 m significa 5 metros sobre el nivel del mar. (Se toma al alto como dirección positiva). (F)

(4) Si el 23 de diciembre de 2004 se toma como el punto de referencia entonces el día -8 corresponde al 15 de diciembre de 2004. (Se toma al futuro como dirección positiva). (V)

(5) Si las 3 p.m. del 23 de diciembre se toma como el punto de referencia entonces 3 a.m. del 24 de diciembre se expresa con -12 horas. (Se toma al futuro como dirección positiva) (F)

(6) Los números negativos se ubican a la derecha de 0 en la recta numérica. (F)

(7) El valor absoluto de 8 es el mismo que el de -8. (V)

(8) Si dos números son negativos, el mayor tiene mayor valor absoluto. (F)

(9) Cero es mayor que todo número negativo. (V)

(10) Si un auto avanza 5 Km hacia el Este desde un punto O y luego recorre 7 Km en dirección contraria entonces el PO que explica tal situación es 7 + (-5) = 2 (Km). (Se toma al Este como dirección positiva). (F)

(11) Toda sustracción se puede convertir en adición. (V)

(12) Cero menos un número es igual a ese número. (F)

(13) El producto de 7 factores negativos es positivo. (F)

(14) El recíproco de 0 es 0. (F)

43

.. viene de la página anterior.

2. Resolver 2 ~ 3.

Continúa en la siguiente página...

Unidad 1: Números positivos y negativos

[Continuación]

2 Responda brevemente las siguientes preguntas.

(1) ¿Cuál es la regla para sumar números de igual signo?
Escribir el signo común y sumar los valores absolutos.

(2) ¿Cómo se definen los números negativos y positivos?
Negativos: menores que el cero. Positivos: mayores que cero.

(3) ¿Qué propiedades de la adición permiten operar en cualquier orden?
Conmutativa y asociativa.

(4) ¿Por qué se dice que la sustracción es un caso particular de la adición?
Porque restar es sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

(5) ¿Cómo se interpreta el PO (-3) x 4 = -12?
Tomando este como valor positivo (Velocidad de 3 Km al Oeste) × (4 horas) = 12 Km al Oeste

(6) ¿Cuál es la ley de los signos para la multiplicación?
(+)×(+) = (+) (+)×(-) = (-) (-)×(-) = (+) (-)×(+) = (-)

(7) ¿Qué es una fracción compleja?
Es aquella cuyo numerador y/o denominador son fracciones.

(8). ¿Cuál es el orden en el desarrollo de las operaciones en un PO que tiene sumas, potencias y divisiones?
Potencias, divisiones y sumas.

(9) ¿Por qué cero no tiene recíproco?
Porque O x □ = 1 es imposible

3 Encuentre el resultado de los siguientes ejercicios.

(1) $(-2) + 6 - (-5) + 3$ **12**

(2) $2.7 - (-3.45) + 3.2 + (-0.5)$ **8.85**

(3) $\frac{3}{4} \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \frac{2}{5}$ **$-\frac{3}{4}$**

(4) $-\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ **$-\frac{15}{8}$**

(5) $(-900) \div (-30)$ **30**

(6) $-0.2 \times (-1.1) \times (-1)$ **-0.22**

(7) $-\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}$ **$\frac{13}{30}$**

(8) $(-2) \times (-6) \times (-1) \times 1$ **-12**

(9) $2.76 \div (-1.2)$ **-2.3**

(10) $28 \div (-7) + (-3) \times 8$ **-28**

(11) $\sqrt{25} + 15 \div (-4) - 6$ **-4.75 ó $-\frac{19}{4}$**

(12) $-45 \times (-2) \div (-6) + (-2)^3 - 10$ **-33**

(13) $(-4)^3$ **-64**

(14) $(-0.3)^2$ **0.09**

(15) $\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{3}}$ **$\frac{9}{20}$**

(16) $\dfrac{\frac{5}{6}}{-\frac{4}{3}}$ **$-\frac{5}{8}$**

(17) $\dfrac{-\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}$ **$-\frac{8}{5}$**

(16) $-\left(\frac{5}{7}\right)^0$ **-1**

[Continuación]

... viene de la página anterior.

3. Resolver 4.

(19) $\left(-\frac{8}{9}\right)^1$ $-\frac{8}{9}$

(20) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0$ 1

(21) $(-8)^0$ 1

(22) 4^{-2} $\frac{1}{16}$

(23) $(-4)^{-2}$ $\frac{1}{16}$

(24) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$ $\frac{25}{4}$

(25) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$ $-\frac{64}{27}$

(26) $(-5)^{-3}$ $-\frac{1}{125}$

4 Resuelva los siguientes problemas.

(1) Un tanque tiene 500 ℓ de agua. En la parte de arriba un tubo vierte 20 ℓ por minuto y abajo tiene una fuga de 40 ℓ por minuto. ¿Habrá agua en el tanque al pasar 25 minutos?

PO: 500 + 20 x 25 -40 x 25 = 0 R: No habrá agua

(2) En el ejercicio anterior, ¿cuántos litros hay a los 5 minutos si la fuga es de 15 ℓ por minuto?

PO: 500 + 20 x 5 -15 x 5 = 525 R: 525 ℓ

(3) En una ciudad la temperatura máxima fue de 6º C y la mínima de -2º C. ¿Cuál es la diferencia máxima entre las temperaturas?

PO: 6 - (-2) = 8 R: 8º C

15

Unidad 2

Variables y expresiones

(27 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan el concepto de variables y expresiones algebraicas.
- Usan variables y expresiones algebraicas para formalizar matemáticamente frases de la vida real.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones
- Expresiones algebraicas
- Reglas convencionales de las expresiones algebraicas
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EA
- Términos y coeficientes en EA
- Producto y división de EA por un número
- Adición y sustracción de EA
- Fórmulas

Ecuaciones de primer grado en una variable
- Igualdades numéricas
- Ecuaciones de primer grado
- Propiedades de la igualdad
- Aplicación de las propiedades de la igualdad en ecuaciones de primer grado
- Solución de ecuaciones de primer grado
- Proceso de resolución de problemas con ecuaciones de primer grado
- Miscelánea de problemas

Octavo grado

Polinomios
- Clasificación y operaciones básicas de polinomios
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Expresiones algebraicas racionales (EAR)
- Expresiones algebraicas racionales
- Multiplicación y división de EAR
- Adición y sustracción de EAR
- Mínimo común denominador de dos EAR
- Despeje de variables en fórmulas

Ecuaciones cuadráticas en una variable
- Ecuaciones cuadráticas
- Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante:
  - Factorización
  - Uso de la raíz cuadrada
  - Completación al cuadrado (fórmula cuadrática)
- Aplicación de las ecuaciones cuadráticas.

Noveno grado

Inecuaciones de primer grado en una variable
- Símbolos de desigualdad
- Propiedades de la desigualdad
- Inecuaciones de primer grado

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Sistema de ecuaciones
- Métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Tipos de sistemas de ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación del sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Ecuaciones de primer grado en dos variables
- Función de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas cartesianas
- Gráfica de una función de primer grado
- Gráfica de una función de primer grado utilizando la ordenada al origen y otros puntos
- Ecuación de la recta
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Gráfica de ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación de las funciónes de primer grado con datos experimentales, figuras geométricas, relación entre dos expresiones y utilización de las gráficas

3 Plan de estudio (27 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Variables y expresiones (12 horas)	1~3/12	• Expresiones algebraicas
	4~8/12	• Reglas convencionales de las expresiones algebraicas
	9~10/12	• Expresión de cantidades con variables
	11~12/12	• Valor numérico de expresiones algebraicas
2. Operaciones con expresiones algebraicas (13 horas)	1/13	• Términos y coeficientes en las expresiones algebraicas
	2~6/13	• Producto y división de expresiones algebraicas por un número (incluye la división convirtiéndola en una multiplicación por su inverso)
	7~11/13	• Adición y sutracción de expresiones algebraicas
	12~13/13	• Fórmulas
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	
Evaluación	No hay horas	

4 Puntos de lección

- **Lección 1: Variables y expresiones**

Los alumnos tienen la experiencia de usar casillas: □, △, ○, etc., para expresar los números en general. Por ejemplo en 6to grado para expresar la propiedad conmutativa de la multiplicación se utilizó la siguiente forma:

□ x ○ = ○ x □.

En esta lección se sustituyen estas casillas por letras a las cuales se les llama *variables*. A la combinación de números y letras unidas con los signos de las operaciones aritméticas se le llama expresión algebraica o más brevemente expresión.

Existen reglas para que las expresiones algebraicas sean concisas:

1 No se escribe el signo de la multiplicación x.

Ejemplo: $a \times b = ab$

2 Se coloca el número antes de las variables.

Ejemplo: $a \times 2 \times b = 2ab$

Nota: Se escribe a en lugar de $1a$ y $-a$ en lugar de $-1a$.

La letra π (pi) cuando se trabaja con la circunferencia, se coloca después del número y antes de las variables, ya que representa un número fijo.

Ejemplo: $\pi \times 2 \times r = 2\pi r$

3 Por lo general no se utiliza el signo de la división "÷" sino que se utiliza la forma de fracción.

Ejemplo: $a \div b = \frac{a}{b}$

$$(2a + 3) \div 4 = \frac{2a + 3}{4}$$

Nota: Hay varias maneras de representar una expresión en la forma de fracción.

Ejemplo: $\frac{a}{4}$ ó $\frac{1}{4}a$; $\frac{3a}{4}$ ó $\frac{3}{4}a$

Por lo general se coloca el signo menos (-) antes de la fracción.

Ejemplo: $\frac{-4a}{3}$ y $\frac{4a}{-3}$ como $-\frac{4a}{3}$ ó $-\frac{4}{3}a$

Sustituyendo las variables por valores numéricos en una expresión algebraica se obtiene el valor numérico de la expresión.

Ejemplo: Cuando $a = -1$ y $b = 2$;

$$\frac{a^2 + 2b - 1}{4} = \frac{(-1)^2 + 2 \times 2 - 1}{4} = \frac{1 + 4 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Cuando se agrega la unidad de medida, hacemos como sigue:

Para agregar la unidad al final del procedimiento, se escribe la unidad entre paréntesis. Ejemplo:

4+3 (n-1) = 1+3n (fósforos)

Para agregar la unidad de medida en la respuesta, hay dos casos:

(1) La respuesta es monomial, sin paréntesis.
Ejemplo:
30n Lempiras

(2) La respuesta no es monomial, se coloca la EA entre paréntesis. Ejemplo:
(500-30n) Lempiras

- **Lección 2: Operaciones con expresiones algebraicas**

Sección 1: Producto de expresiones algebraicas por un número

En una expresión algebraica como $3a - 4b + 9$, se puede convertir la sustracción en una adición cambiando el signo del sustraendo, esto es $3a + (-4b) + 9$. En esta última expresión $3a$, $-4b$ y 9 son términos de la expresión algebraica, es decir, un término de una expresión algebraica consiste en un número multiplicado por una o más variables. La suma de todos los términos conforma la expresión algebraica. La parte numérica 3 de $3a$ y -4 de $-4b$ se llama coeficiente.

Una de las mayores dificultades que presentan los estudiantes es cuando eliminan un paréntesis precedido del signo menos (-).

Ejemplo: $3a + 4 - (5a - 3) = 3a + 4 - 5a + 3$.

Por lo general sólo realizan la multiplicación por el primer término del paréntesis olvidándose del resto.

En el LE se explica el procedimiento del cálculo de la sustracción, es decir, restar un número equivale a sumar el número con diferente signo (el número opuesto). Cambiar el signo equivale a multiplicar por -1.

Estos conceptos los estudiantes ya los aprendieron en la unidad 1.

Ejemplo:

$3a + 4 - (5a - 3) = 3a + 4 + (-1)(5a - 3)$

En este momento los alumnos tienen que saber el cálculo de $(-1)(5a - 3)$. Por esta razón en el LE se estudia la multiplicación de un número por una expresión antes de la adición.

La parte referida específicamente al producto de una expresión algebraica por un número se enfoca en la enseñanza del cálculo que se necesita para resolver ecuaciones de primer grado. El cálculo general en los polinomios se explicará en octavo grado.

En el DCNEB se mencionan las ecuaciones de primer grado como ecuaciones líneales< en éstos textos se denominarán como ecuaciones de primer grado. Dado que las ecuaciones líneales deben cumplir con la forma de $f(x) = mx$, $b = 0$.

Las funciones que $b = 0$, es decir, $f(x) = mx + b$, son llamadas funciones afines.

Al trabajar con expresiones algebraicas se aplicará lo siguiente:

1	$2a \times 3 = 6a$	Se escribe el número primero y las variables después
2	$2a \times \frac{1}{2} = a$	Se omite el coeficiente 1
3	$2a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -a$	En lugar del coeficiente -1 se escribe sólo el signo menos

Hay dos maneras de realizar la división de una expresión algebraica entre un número:

1. Convertir la división en una multiplicación utilizando el recíproco (inverso multiplicativo).
2. Expresar el cociente en la forma de una fracción (Ejemplo **A3** del LE).

Ejemplo: $4a \div 6 = \frac{\overset{2}{\cancel{4a}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{2a}{3}$

Para la división de una expresión algebraica entre una fracción se utiliza la manera (a) del caso anterior para evitar la forma donde hay otra fracción en el denominador, es decir se evita trabajar con una fracción compleja (Ejemplo **A4** del LE).

Ejemplo: $4a \div \frac{3}{5} = 4a \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3}a$

Para la multiplicación de un número por una expresión algebraica con varios términos se utiliza la propiedad distributiva y se elimina el paréntesis (Ejemplo **A5** y **A6** del LE).

Ejemplo:

1 $(2a - 3) \times (-4) = \{2a + (-3)\} \times (-4)$

$= 2a \times (-4) + (-3) \times (-4)$

$= -8a + 12$

2 $-(2a - 3) = (-1) \times (2a - 3)$

$= (-1) \times 2a + (-1) \times (-3)$

$= -2a + 3$

3 $\frac{(3a + 4)}{5} \times 7 = \frac{(3a + 4) \times 7}{5}$

$= \frac{21a + 28}{5}$

Hay dos maneras de realizar la división de una expresión algebraica (de más de un término) entre un número (Ejemplo **A8** y **A9** del LE).

1 $(6a + 10) \div 4 = (6a + 10) \times \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}$

2 $(6a + 8) \div 4 = \frac{\overset{3}{\cancel{6a}} + \overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}$

$= \frac{3a + 4}{2}$

$= \frac{3}{2}a + 2$

En la forma (b) es importante dividir los dos términos del numerador.

Sección 2. Adición y sustracción de expresiones algebraicas

Dos o más términos son semejantes si tienen la misma letra o variable con el mismo exponente. Los términos semejantes se simplifican haciendo uso de la propiedad distributiva de la multiplicación.

Ejemplo: $2a + 3a = (2 + 3)a$

$= 5a$

Para sumar y restar expresiones algebraicas se eliminan los paréntesis que las separan y luego se simplifican los términos semejantes.

En el proceso de eliminar paréntesis se debe tener el cuidado de no equivocarse con el signo.

Ejemplo:

1 $(3a + 4) + (5a - 6)$

Para aplicar la propiedad asociativa de la adición hay que convertir la sustracción en una adición.

$(3a + 4) + (5a - 6) = (3a + 4) + \{(5a + (-6)\}$ (1)

$= 3a + 4 + 5a + (-6)$

$= 8a - 2$

(1) *Ahora se pueden eliminar los paréntesis porque se suma en cualquier orden.*

La adición del último término (-6) se puede expresar directamente como una sustracción $3a + 4 + 5a - 6$

Comparando con la primera expresión, se sabe que basta eliminar los paréntesis en el caso de la adición

$(3a + 4) + (5a - 6) = 3a + 4 + 5a - 6$

2 $(5a + 4) - (2a - 6) = (5a + 4) + (-1)(2a - 6)$

$= (5a + 4) + (-2a + 6)$

$= 3a + 10$

Por lo general se efectúa el cálculo en la siguiente forma:

$(5a + 4) - (2a - 6) = 5a + 4 - 2a + 6$

$= 3a + 10$

En este proceso cuando hay un signo menos antes del paréntesis es muy importante el cambio de signo en todos los términos dentro del paréntesis, es decir, $2a$ cambia a $-2a$ y -6 cambia a +6.

Sección 3: Fórmulas

En esta sección se expresan en variables varias fórmulas que se enseñaron en los grados anteriores utilizando los símbolos □, △, ○,etc. El número π que se utiliza cuando se trabaja con la circunferencia se escribe entre el número y las variables, porque el número π representa un valor fijo.

5 Desarrollo de clases

1. Comentar lo observado en el problema. [A1]

M: Formemos cuadrados uno después de otro utilizando fósforos. ¿Cuántos fósforos se necesitan para formar 1, 2 y 3 cuadrados?

RP: Para 1 cuatro fósforos, para 2 siete fósforos y para 3 diez fósforos.

M: Cuando el primer cuadrado está formado, ¿cuántos fósforos se agregan para formar el segundo cuadrado (y el tercero)?

RP: Tres fósforos.

M: ¿Cómo se puede descomponer el primer cuadrado formado utilizando esta última respuesta?

RP: Como 1 fósforo y 3 fósforos.

2. Escribir con operaciones la cantidad de fósforos.

* Sugerir que primero usen sumas

M: ¿Cómo se pueden expresar las sumas utilizando la multiplicación?

RP: 1 + 3 x 1 ; 1 + 3 x 2 ; 1 + 3 x 3

* Enfatizar para 2 ó 3 cuadrados.

3. Generalizar y sustituir por símbolos.

M: Si se representa con □ la cantidad de cuadrados formados, ¿cómo se puede expresar en forma general la cantidad de fósforos que se necesita para formar los cuadrados?

RP: Como 1 + 3 x □

* Indicar que ahora se utilizarán las letras en vez de los signos □, etc.

M: Si □ se sustituye por n, ¿cómo se escribirá la expresión 1 + 3 x □?

RP: 1 + 3 x n

Lección 1: (1~3/2) Variables y expresiones

Objetivo:
- Escribir cantidades como expresiones algebraicas.
- Identificar las variables y los números en una expresión algebraica.

Materiales: (N) LE, fósforos.



Unidad 2 Variables y expresiones

Lección 1: Variables y expresiones

Sección 1: Expresiones algebraicas

A1 Se forman varios cuadrados unidos, uno después de otro.
¿Cuántos fósforos se necesitan para formar 1, 2 y 3 cuadrados?

Observe que al ir formando los cuadrados, se colocan los fósforos como se muestra a continuación.

Se puede descomponer los cuadrados.

	1	2	3
Representación			
Cantidad de fósforos	1 + 3	1 + 3 x 2	1 + 3 x 3

Si se representa la cantidad de cuadrados con □, la cantidad de fósforos es igual a 1 + 3 x □.

Si se utiliza la letra n para representar la cantidad de cuadrados la expresión de arriba sería: cantidad de fósforos = 1 + 3 x n.

Anteriormente usamos □ o △ para representar números. De ahora en adelante usaremos las letras en lugar de estos símbolos.

40

* Indicar que las letras tienen la misma función que □, etc.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (1~3/12)

Variables y expresiones

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

1 Encuentre la cantidad de fósforos para formar 10, 20 y 30 cuadrados consecutivos.

31, 61, 91

Usando una letra en lugar de un número se pueden representar cosas infinitas sólo con una expresión a la vez. La expresión 1 + 3 x n muestra la forma de cálcular.

Se llama **variable** a aquello que puede asumir uno o diferentes valores.
Se llama **expresión algebraica** a la combinación de números y variables (letras) unidas por los signos de las operaciones básicas.

Ejemplo: 1 + 3 x n es una expresión algebraica, n es una variable.

2 Se forman triángulos unidos uno después de otro colocando fósforos.
Exprese la cantidad de fósforos para formar n triángulos.



1 + 3n

Ahora representemos varias cantidades con variables.

2 El precio total de n cuadernos donde cada uno cuesta 20 Lempiras.

Cantidad de cuadernos	1	2	3	...	n
Precio total (Lempiras)					

Cantidad de cuadernos	1	2	3	...	n
Precio total (Lempiras)	20 x 1	20 x 2	20 x 3	...	20 x n

El precio total en su forma más general es 20 x n (Lempiras) donde n es la cantidad de cuadernos.

3 El cambio para 500 Lempiras cuando se compran n cuadernos donde cada uno cuesta 20 Lempiras.

Cantidad de cuadernos	1	2	3	...	n
Cambio (Lempiras)					

Cantidad de cuadernos	1	2	3	...	n
Cambio (Lempiras)	500 - 20 x 1	500 - 20 x 2	500 - 20 x 3	...	500 - 20 x n

... viene de la página anterior.

4. Resolver 1.

* Lo importante es que el estudiante se de cuenta que sólo tienen que sustituir el valor de n por 10 (20 ó 30) en la expresión 1 + 3 x n.

5. Llamar expresión algebraica a este tipo de expresiones.

* Indicar que a las letras se les llama variables.

* Indicar que expresiones como 1 + 3n son expresiones algebraicas.

6. Resolver 2.

[Hasta aquí 1/12]

[Desde aquí 2~3/12]

1. Pensar en la forma de encontrar el precio total de n cuadernos. [A2]

M: ¿Cuál es el precio para 1 cuaderno (2, 3, …)?

RP: Para 1 veinte Lempiras, para 2 cuarenta Lempiras, etc.

* Indicar que llenen la tabla pero expresando las cantidades con las operaciones no con los resultados.

M: ¿Cuál es la relación que existe entre la cantidad de cuadernos y el precio total?

RP: Para encontrar el precio total se multiplica el precio por unidad (20 Lempiras) por la cantidad de cuadernos.

M: ¿Cuál es el precio para n cuadernos?

RP: Es 20 x n.

M: ¿Cómo se le puede llamar a 20 x n?

RP: Expresión algebraica.

2. Pensar en la forma de encontrar el cambio de 500 lempiras cuando se compran n cuadernos. [A3]

* Desarrollar esta actividad en forma similar a como se desarrolló la del inciso 1.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

3. Resolver 3 .

4. Pensar en la forma de encontrar el precio total de *n* cuadernos y *b* bolígrafos. [A4]

M: ¿Cuál es el precio para *n* cuadernos?

RP: Es (20 x *n)* Lempiras.

M: ¿Cuál es el precio para *b* bolígrafos?

RP: Es (15 x *b)* Lempiras.

M: ¿Cuál es el precio total para *n* cuadernos y *b* bolígrafos?

RP: Es (20 x *n* + 15 x *b)* Lempiras.

M: ¿Cómo se le puede llamar a 20 x *n* + 15 x *b*?

RP: Expresión algebraica.

* Indicar que en este caso hay dos variables: *n* y *b*.
* Indicar qué significa cada variable.

5. Resolver 4 .

Lección 1: (2~3/12) Variables y expresiones

[Continuación]

Materiales:

3 Exprese lo siguiente.

(1) Si expresamos la edad de Samuel con la letra *e*, ¿cuál sería la edad de Samuel dentro de 6 años?
e + 6
(2) Si usamos la letra *e* para representar la edad, ¿cuál sería la edad de María hace 5 años?
e - 5
(3) Si *n* representa un número, ¿cuánto representa el doble del número?
2 x*n*
(4) Si *n* representa un número, ¿cuánto representa el triple del número?
3 x*n*
(5) El área de un rectángulo de *b* cm de largo y 7 cm de ancho.
(*b* x7) cm²
(6) El área de un paralelogramo que mide *b* cm de base y 5 cm de altura.
(*b* x 5) cm²
(7) Si *n* es un número entero, ¿cuál sería la expresión para el doble del número entero aumentando en 3 unidades?
2 x *n* + 3
(8) El perímetro de un hexágono regular cuyo lado mide *a* cm.
(6 x *a*) cm
(9) Si *n* es el primer número entero, ¿qué expresión representa la suma de dos enteros consecutivos?
n + *n* + 1

4 ¿Cuál es el precio total de *n* cuadernos que cuestan 20 Lempiras cada uno y *b* bolígrafos que cuestan 15 Lempiras cada uno?

(20 x *n* + 15 x *b*) Lempiras

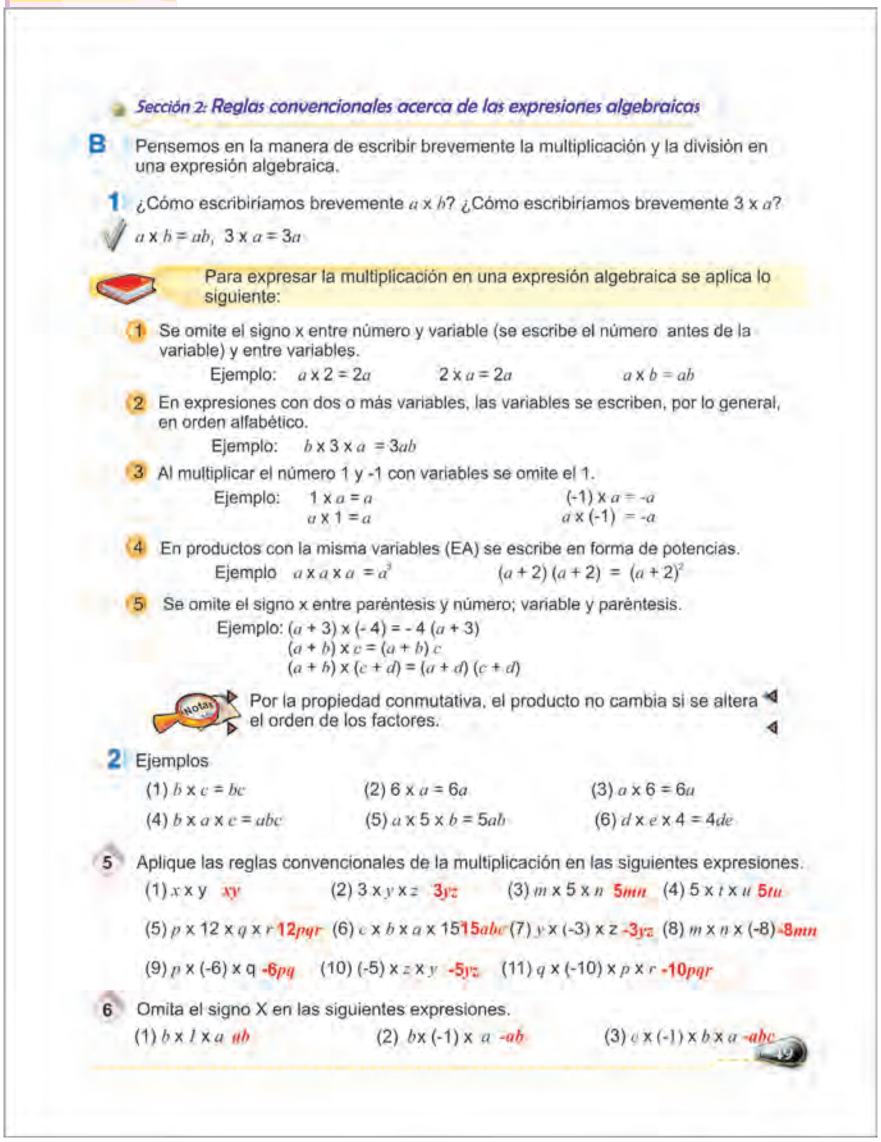
4 Exprese las siguientes cantidades con variables.

(1) El perímetro de un triángulo donde 2 de sus lados miden *a* cm y el otro lado mide *b* cm.
(2 x *a* + *b*) cm
(2) El perímetro de un rectángulo que tiene *a* cm de base y *b* cm de altura.
(2 x *a* + 2 x *b*) cm
(3) Lo que ahorra una persona en *a* días, si gana 120 Lempiras diarios y gasta 80 Lempiras por día.
(120 x *a* - 80 x *a*) Lempiras
(4) El perímetro de un triángulo escaleno cuyos lados miden *a* cm, *b* cm y *c* cm.
(*a* + *b* + *c*) cm
(5) La cantidad total de estudiantes de un aula donde hay *a* varones y *b* muchachas.
(*a* + *b*) estudiantes

Lección 1: (4/12) Variables y expresiones

Objetivo: • Aplicar reglas convencionales para la escritura de multiplicación de expresiones algebraicas (EA).

Materiales:



Sección 2: Reglas convencionales acerca de las expresiones algebraicas

B Pensemos en la manera de escribir brevemente la multiplicación y la división en una expresión algebraica.

1 ¿Cómo escribiríamos brevemente $a \times b$? ¿Cómo escribiríamos brevemente $3 \times a$?

$a \times b = ab$, $3 \times a = 3a$

Para expresar la multiplicación en una expresión algebraica se aplica lo siguiente:

1. Se omite el signo x entre número y variable (se escribe el número antes de la variable) y entre variables.
   Ejemplo: $a \times 2 = 2a$ $\quad 2 \times a = 2a$ $\quad a \times b = ab$
2. En expresiones con dos o más variables, las variables se escriben, por lo general, en orden alfabético.
   Ejemplo: $b \times 3 \times a = 3ab$
3. Al multiplicar el número 1 y -1 con variables se omite el 1.
   Ejemplo: $1 \times a = a$ $\quad (-1) \times a = -a$
   $a \times 1 = a$ $\quad a \times (-1) = -a$
4. En productos con la misma variables (EA) se escribe en forma de potencias.
   Ejemplo $a \times a \times a = a^3$ $\quad (a+2)(a+2) = (a+2)^2$
5. Se omite el signo x entre paréntesis y número; variable y paréntesis.
   Ejemplo: $(a+3) \times (-4) = -4(a+3)$
   $(a+b) \times c = (a+b)c$
   $(a+b) \times (c+d) = (a+d)(c+d)$

Notas: Por la propiedad conmutativa, el producto no cambia si se altera el orden de los factores.

2 Ejemplos

(1) $b \times c = bc$ (2) $6 \times a = 6a$ (3) $a \times 6 = 6a$

(4) $b \times a \times c = abc$ (5) $a \times 5 \times b = 5ab$ (6) $d \times e \times 4 = 4de$

5 Aplique las reglas convencionales de la multiplicación en las siguientes expresiones.

(1) $x \times y$ xy (2) $3 \times y \times z$ $3yz$ (3) $m \times 5 \times n$ $5mn$ (4) $5 \times t \times u$ $5tu$

(5) $p \times 12 \times q \times r$ $12pqr$ (6) $c \times b \times a \times 15$ $15abc$ (7) $y \times (-3) \times z$ $-3yz$ (8) $m \times n \times (-8)$ $-8mn$

(9) $p \times (-6) \times q$ $-6pq$ (10) $(-5) \times z \times y$ $-5yz$ (11) $q \times (-10) \times p \times r$ $-10pqr$

6 Omita el signo X en las siguientes expresiones.

(1) $b \times 1 \times a$ ab (2) $b \times (-1) \times a$ $-ab$ (3) $c \times (-1) \times b \times a$ $-abc$

49

Notas: $-a = (-1)a$ es la definición de la expresión de $-a$. Cuando a es un número negativo, $-a$ no estaba definido en la unidad 1.

1. **Pensar en la forma de escribir brevemente las expresiones algebraicas con productos. [B1]**

M: ¿Cómo se puede escribir brevemente a x b? ¿3 x a?

RP: Como ab, ba, y como $3a$, $a3$

* Puede haber varias respuestas.

2. **Expresar las reglas utilizadas en la multiplicación de expresiones algebraicas.**

* Explicar las reglas (1) y (2)

M: ¿De qué forma se escribe la multiplicación en una EA?

RP: Omitiendo el signo x entre las variables.

M: ¿En la multiplicación de EA, ¿qué se escribe primero, los números o las variables?

RP: Primero los números y luego las variables.

M: ¿En qué orden se escriben por lo general las variables de los productos?

RP: En orden alfabético.

* Aclarar que el orden de los factores no altera el producto.

3. **Aplicar las reglas utilizadas en la multiplicación de EA. [B2]**

* Cerciorarse que eliminan el signo x y que escriben primero los números y después las variables.

* Verificar que escriban las variables en orden alfabético.

4. **Resolver 5.**

5. **Aplicar más reglas utilizadas en la multiplicación de EA.**

* Explicar la regla (3).

6. **Resolver 6.**

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

* Explicar que 0.1 x a es 0.1a y no 0.a

7. Pensar en la forma más simple de escribir -(-a).

M: ¿Qué valor tiene -(-a)?

* Si no hay respuesta, preguntar.

M: ¿Qué significa -a?

RP: -a = (-1) x a

M: Entonces, ¿qué significa -(-a)?

RP: (-1) x {(-1) x a}

M: Calculen

RP: (-1) x {(-1) x a}

= {(-1) x (-1)}x a = a

* Concluir que -(-a) = a

[Hasta aquí 4/12]

[Desde aquí 5/12]

1. Aplicar la regla (4). [B3]

* Dar a conocer que hay que poner dentro del paréntesis EA con el signo (-) en la forma de potencias, utilizando ejemplos numéricos como:

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

$-3^2 = -3 \times -3 = -9$

* Evitar la confusión entre

$a \times a \times a = a^3$ y $a + a + a = 3a$

2. Resolver 7.

3. Aplicar la regla (5). [B4]

4. Resolver 8.

5. Aplicar las reglas en polinomios. [B5]

* Dar a conocer que se aplican las reglas aprendidas siempre y cuando se trata de multiplicación.

6. Resolver 9.

Lección 1: (4/12)

Variables y expresiones

[Continuación]

Objetivo: (5/12)

- Expresar en forma abreviada la multiplicación de EA con la misma variable.
- Expresar en forma abreviada la multiplicación de dos EA.

Notas: 0.1 x a se escribe 0.1 a y nunca como 0.a

$-(-a) = (-1)\{(-1)\,a\} = \{(-1)(-1)\}\,a = 1a = a$

es decir $-(-a) = a$

3 Ejemplo. $a \times a \times a \times a = a^4$ $\quad (-n) \times (-n) = (-n)^2$

Notas: Hay que usar paréntesis en la potencia de EA con el signo menos (-). $(-n)^2$ no es igual a $-n^2$.

7 Omita el signo x.

(1) $(-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a)$ $\quad (-a)^4$

(2) $b \times 3 \times b$ $\quad 3b^2$

(3) $b \times (-4) \times b \times b$ $\quad -4\,b^3$

4 Ejemplo.

(1) $4 \times (a + 3) = 4(a + 3)$ $\qquad$ (2) $(b + 5) \times (-4) = -4(b + 5)$

(3) $(a + 3) \times (b + 2) = (a + 3)(b + 2)$ $\qquad$ (4) $(m + 2) \times (n + 6) = (m + 2)(n + 6)$

8 Escriba la expresión sin el signo x.

(1) $(-5) \times (b - 8)$ $\quad -5\,(b - 8)$ $\qquad$ (2) $(5 - a) \times (-2)$ $\quad -2\,(5 - a)$ $\qquad$ (3) $(m + 5) \times 3$ $\quad 3\,(m + 5)$

(4) $5 \times (z + 4)$ $\quad 5\,(z + 4)$ $\qquad$ (5) $(y - 2) \times (y + 2)$ $\quad (y - 2)(y + 2)$ $\qquad$ (6) $(p - s) \times (7 - p)$ $\quad (p - s)(7 - p)$

5 Ejemplo.

(1) $3 \times a + 2 = 3a + 2$ $\qquad$ (2) $a \times 4 - 2 \times b = 4a - 2b$ $\qquad$ (3) $1 \times a - b \times 1 = a - b$

9 Escriba la expresión sin el signo x.

(1) $m \times 3 - 5$ $\quad 3m - 5$ $\qquad$ (2) $5 \times b \div (-2)$ $\quad 5b + 2$ $\qquad$ (3) $d \times 1 - 1 \times e$ $\quad d - e$

(4) $c \times 3 - 4 \times d$ $\quad 3c - 4d$ $\qquad$ (5) $-2 \times y \div 6 \times z$ $\quad -2y + 6z$ $\qquad$ (6) $5 \times p - 7 \times q$ $\quad 5p - 7q$

(7) $1 \times t \div u \times 1$ $\quad t + u$ $\qquad$ (8) $n \times 1 \div p \times 1$ $\quad n + p$ $\qquad$ (9) $4 - m \times 4$ $\quad 4 - 4m$

(10) $1 \div y \times z$ $\quad 1 + yz$ $\qquad$ (11) $m \times 1 \div 1 \times y$ $\quad m + y$ $\qquad$ (12) $-3 \times m - 5 \times h$ $\quad 3m - 5h$

Notas: En el desarrollo de clases se hacen todos los cálculos de los ejemplos y se indican que hagan una parte de los ejercicios según el tiempo disponible. Los estudiantes avanzados podrán resolver los demás en la clase. Pueden dejarlos como tarea.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (5/12)

Variables y expresiones

[Continuación]

Objetivo: (6/12)

- Expresar en forma abreviada la división de una EA entre un número.

En la unidad 1, aprendimos que restar un número equivale a sumar el número opuesto y cambiar el signo equivale a multiplicar por -1. Por lo tanto, $a - b = a + \{(-1) \times b\} = a + (-b)$ y $a - (-b) = a + \{(-1) \times (-1) \times b\} = a + b$
es decir, $a + (-b) = a - b$, $a - (-b) = a + b$

6 Ejemplo.

(1) $a + (-4) \times b = a + (-4b) = a - 4b$

(2) $a + (-4) \times b = a - (-4b) = a + 4b$

(3) $2 \times a - (-3) \times b = 2a - (-3b) = 2a + 3b$

10 Escriba la expresión sin el signo x.

(1) $3 \times a + (-2) \times b$ $3a - 2b$	(2) $a \times 3 + b \times (-4)$ $3a - 4b$	(3) $(-2) \times a - b \times (-3)$ $-2a + 3b$
(4) $0.1 \times a - b \times 1.2$ $0.1a - 1.2b$	(5) $4 \times a - (-5) \times b$ $4a + 5b$	(6) $2.3 \times t - (-1) \times u$ $2.3t + u$
(7) $(-2) \times y + z \times (-3)$ $-2y - 3z$	(8) $m \times (-1.1) - n \times (-0.5)$ $-1.1m + 0.5n$	(9) $b \times 1 + (-1) \times c$ $b - c$

Notas: $a + \frac{1}{3}$ no se escribe como $a\frac{1}{3}$ porque el signo entre la letra a y el número $\frac{1}{3}$ es el signo + y $a\frac{1}{3}$ quiere decir multiplicación.
En cuanto a la división, hemos aprendido en grados anteriores, que se puede representar el cociente $2 \div 3$ como $\frac{2}{3}$.

La división en una EA se escribe como una fracción.

7 Ejemplo.

(1) $a \div 3 = \frac{a}{3}$ (2) $2a \div 3 = \frac{2a}{3}$

Notas: Como $a \div 3 = a \times \frac{1}{3}$, se puede escribir $a \div 3$ como $\frac{1}{3}a$.

Notas: Hay dos formas de escribir $a \div 3$ una es $\frac{a}{3}$ y la otra es $\frac{1}{3}a$.

11 Escriba como fracción las siguientes expresiones.

(1) $5m \div 8$ $\frac{5m}{8}$	(2) $s \div 4$ $\frac{s}{4}$	(3) $3t \div 2$ $\frac{3t}{2}$
(4) $2p \div 3$ $\frac{2p}{3}$	(5) $5l \div 2$ $\frac{5l}{2}$	(6) $y \div 10$ $\frac{y}{10}$

... viene de la página anterior.

7. **Entender que $a + (-b) = a - b$, $a - (-b) = a + b$**
   * Dar a entender que con b positivo, éstas son las reglas de sustracción vistas en la unidad 1.

8. **Aplicar lo que han visto. [B6]**

9. **Resolver 10.**
   * Cuando hay un signo menos antes del paréntesis y dentro del mismo hay un número negativo observando "- (-" el resultado es positivo (+). Ejemplo: 2-(-3) = 2 + 3

10. **Confirmar que una fracción mixta es la suma de la parte entera y la fraccionaria.**
    * Aclarar que $a + \frac{1}{3}$ es una suma, por lo que la regla no se aplica escribiéndola como $a\frac{1}{3}$ y que ésta última expresión es un producto.

[Hasta aquí 5/12]

[Desde aquí 6/12]

1. **Pensar en la forma de escribir la división de EA entre un número. [B7]**

M: ¿Cómo se puede escribir $a \div 3$ como fracción? y ¿$2a \div 3$?

RP: Como $\frac{a}{3}$ y $\frac{2a}{3}$.

* Recordar que la división se expresa como una multiplicación por el inverso del divisor.
* Explicar que existen dos formas de escribir la división de una variable entre un número.

2. **Resolver 11.**

1. Pensar en la forma de escribir la división de EA.

M: ¿Cómo se puede escribir $(-a) \div b$ como fracción? y ¿$a \div (-b)$?

RP: Como $-\dfrac{a}{b}$

M: ¿Cómo se puede escribir $(-a) \div (-b)$ como fracción?

RP: Como $\dfrac{a}{b}$

* Es importante hacer la referencia a una situación similar con los números negativos y positivos vistos en la unidad 1 en cuanto al signo.

2. Resolver 12.

* Explicar que no se usan paréntesis en el numerador.

3. Pensar en la forma de escribir la división de EA entre un número. [B9]

M: ¿Cómo se puede escribir $(a + 3) \div 4$ como fracción? y ¿$(a + 3) \div (-4)$?

RP: Como $\dfrac{a+3}{4}$ y $-\dfrac{a+3}{4}$

4. Pensar en la forma de escribir la división de un número entre una EA?

M: ¿Cómo se puede escribir $4 \div (a + 3)$ como fracción? y ¿$(-4) \div (a + 3)$?

RP: Como $\dfrac{4}{a+3}$ y $-\dfrac{4}{a+3}$

* Mencionar que no se usan paréntesis en el denominador.

5. Resolver 13.

[Hasta aquí 7/12]

[Desde aquí 8/12]

1. Pensar en la forma de escribir la multiplicación y/o división de EA como fracción. [B10]

Lección 1: (7/12) Variables y expresiones

Objetivo: • Expresar en forma abreviada la división de expresiones algebraicas.

Objetivo: (8/12) • Escribir en forma abreviada las expresiones algebraicas que contienen varias operaciones.

Materiales:

8 Ejemplo

(1) $(-a) \div b = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{(-1) \times a}{b} = (-1) \times \dfrac{a}{b} = -\dfrac{a}{b}$, es decir, $(-a) \div b = -\dfrac{a}{b}$

(2) $a \div (-b) = \dfrac{a}{-b} = \dfrac{a}{(-1) \times b} = \dfrac{1}{-1} \times \dfrac{a}{b} = (-1) \times \dfrac{a}{b} = -\dfrac{a}{b}$, es decir $a \div (-b) = -\dfrac{a}{b}$

(3) $-a \div (-b) = \dfrac{-a}{-b} = \dfrac{(-1) \times a}{(-1) \times b} = \dfrac{a}{b}$ es decir $(-a) \div (-b) = \dfrac{a}{b}$

Notas: Ponga atención en el signo.

12 Escriba las siguientes expresiones en forma de fracción.

(1) $(-5) \div a$ $\quad -\dfrac{5}{a}$ (2) $(-m) \div 4$ $\quad -\dfrac{m}{4}$ (3) $(-p) \div (-3)$ $\quad \dfrac{p}{3}$

(4) $(-7) \div (-n)$ $\quad \dfrac{7}{n}$ (5) $5 \div (-y)$ $\quad -\dfrac{5}{y}$ (6) $z \div (-2)$ $\quad -\dfrac{z}{2}$

9 Ejemplo

(1) $(a + 3) \div 4 = \dfrac{a+3}{4}$ (2) $(a + 3) \div (-4) = -\dfrac{a+3}{4}$

(3) $4 \div (a + 3) = \dfrac{4}{a+3}$ (4) $(-4) \div (a + 3) = -\dfrac{4}{a+3}$

13 Escriba las expresiones siguientes conforme a la convención de EA.

(1) $(s + 4) \div (-3)$ $\quad -\dfrac{s+4}{3}$ (2) $(p - 1) \div 2$ $\quad \dfrac{p-1}{2}$ (3) $(-8) \div (7 + g)$ $\quad -\dfrac{8}{7+g}$ (4) $(g + r) \div 4$ $\quad \dfrac{g+r}{4}$

(5) $(-1) \div (a - b)$ $\quad -\dfrac{1}{a-b}$ (6) $(21 + z) \div (-4)$ $\quad -\dfrac{21+z}{4}$ (7) $(5p - q) \div 2$ $\quad \dfrac{5p-q}{2}$ (8) $8 \div (2n - 1)$ $\quad \dfrac{8}{2n-1}$

10 Ejemplo

(1) $4 \times a \div 5 = 4a \div 5 = \dfrac{4a}{5}$ (2) $a \div 4 \times 5 = \dfrac{a}{4} \times 5 = \dfrac{5a}{4}$

(3) $a \div 4 \div 5 = \dfrac{a}{4} \div 5 = \dfrac{a}{20}$

14 Exprese en forma de fracción.

(1) $q \div 4 \times 3$ $\quad \dfrac{3q}{4}$ (2) $8 \div a \div 5$ $\quad \dfrac{8}{5a}$ (3) $(-2) \times a \div 5$ $\quad -\dfrac{2a}{5}$

(4) $1 \div 2 \div (-m)$ $\quad -\dfrac{1}{2m}$ (5) $s \div 4 \times (-7)$ $\quad -\dfrac{7s}{4}$ (6) $(-r) \times 2 \div 5$ $\quad -\dfrac{2r}{5}$

(7) $5 \div 3 \div y$ $\quad \dfrac{5}{3y}$ (8) $t \div 4 \times u$ $\quad \dfrac{tu}{4}$ (9) $(-3) \times (-m) \div 7$ $\quad \dfrac{3m}{7}$

M: ¿Cómo se puede escribir $4 \times a \div 5$ como fracción? y ¿$a \div 4 \times 5$?

RP: Como $\dfrac{4a}{5}$ y $\dfrac{5a}{4}$.

M: ¿Cómo se puede escribir $a \div 4 \div 5$ como fracción?

RP: Como $\dfrac{a}{20}$.

2. Resolver 14.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (8/12)

Variables y expresiones

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

11 Ejemplo

(1) $b \div 3 + c \div 4 = \frac{b}{3} + \frac{c}{4}$ (2) $z \div 5 - b \div 6 \times c = \frac{z}{5} - \frac{bc}{6}$

(3) $3 \div z \div 4 - 8 \times m \times n = \frac{3}{4z} - 8mn$

15 Escriba como fracción las siguientes expresiones.

(1) $a \div 7 - b \times 5$ $\frac{a}{7} - 5b$ (2) $q \div 4 \times 3 + r \times 2 \div 5$ $\frac{3q}{4} + \frac{2r}{5}$ (3) $t \div 4 \times u - 5 \div 4 \times 7$ $\frac{tu}{4} - \frac{35}{4}$

(4) $1 \div 2 \div m - 5 \times n$ $\frac{1}{2m} - 5n$ (5) $y \div 2 \div z - 3 \times a \times b$ $\frac{y}{2z} - 3ab$ (6) $a \div 3 - 6 \div b \times c$ $\frac{a}{3} - \frac{6c}{b}$

(7) $a \div 4 + 5 \div c$ $\frac{a}{4} + \frac{5}{c}$ (8) $h \div 2 \times 5 + m \times 3 \div 7$ $\frac{5h}{2} + \frac{3m}{7}$ (9) $c \div 4 + d \div 5$ $\frac{c}{4} + \frac{d}{5}$

16 Escriba las siguientes expresiones con los signos x y/o ÷.

(1) $\frac{ab}{5}$ $a \times b \div 5$ (2) $\frac{3y}{4}$ $3 \times y \div 4$ (3) $8ab$ $8 \times a \times b$ (4) $\frac{8}{5a}$ $8 \div 5 \div a$ (5) $-\frac{2a}{5}$ $-2 \times a \div 5$

(6) $\frac{1}{2m}$ $1 \div 2 \div m$ (7) $-\frac{7s}{4}$ $-7 \times s \div 4$ (8) $\frac{2r}{5}$ $2 \times r \div 5$ (9) $\frac{tu}{4}$ $t \times u \div 4$ (10) $-\frac{9x}{7}$ $9 \times x \div (-7)$

(11) $\frac{4a}{3} - 5ab$ $4 \times a \div 3 - 5 \times a \times b$ (12) $-\frac{4}{a-5} + 2b$ $(-4) \div (a - 5) + 2 \times b$

... viene de la página anterior.

3. Pensar en la manera de escribir en forma abreviada las EA. [B11]

M: ¿Cómo se puede escribir $b \div 3 + c \div 4$ como fracción?

RP: Como $\frac{b}{3} + \frac{c}{4}$.

M: ¿Cómo se puede escribir $z \div 5 - b \div 6 \times c$ como fracción?

RP: Como $\frac{z}{5} - \frac{bc}{6}$.

M: ¿Cómo se puede escribir $3 \div z \div 4 - 8 \times m \times n$ como fracción?

RP: Como $\frac{3}{4z} - 8mn$

4. Resolver 15.

5. Resolver 16.

* En este ejercicio las EA se dan en forma de fracción para que el estudiante las exprese en la forma (EA) ÷ (número) o (número) ÷ (EA).

1. Comentar lo observado en el problema. [C1]

M: Si se sabe que el largo de un rectángulo mide a cm y el ancho mide b cm, ¿cómo se puede expresar su área?

RP: Multiplicando a por b, a x b, ab, (cm^2).

* Si los estudiantes tienen dificultad para expresar el área utilizando las variables, preséntenles un ejercicio donde las medidas estén dadas en forma numérica para que tengan una mejor comprensión.

* Es importante que los estudiantes expresen el procedimiento en palabras y luego lo traduzcan en una EA.

M: Para este mismo rectángulo, ¿cómo se puede expresar su perímetro?

RP: Sumando ambos lados dos veces, $a + b + a + b$, $2a + 2b$, 2 (a+b) (cm).

2. Resolver 17.

3. Expresar cantidades con variables. [C2]

M: Si se camina a metros en 8 minutos, ¿cuál es la velocidad por minuto?

RP: $a \div 8 = \frac{a}{8}$ (m/min).

* Es importante recordar que la velocidad se define como la distancia entre el tiempo.

M: Si cada cuaderno cuesta b Lempiras y se compran 9, ¿cómo se expresaría el gasto en la compra?

RP: b x 9 = 9b (Lempiras)

M: Don Alberto tiene m niños y quiere repartirles en partes iguales 50 Lempiras. ¿Cómo se expresaría la cantidad dada a cada uno?

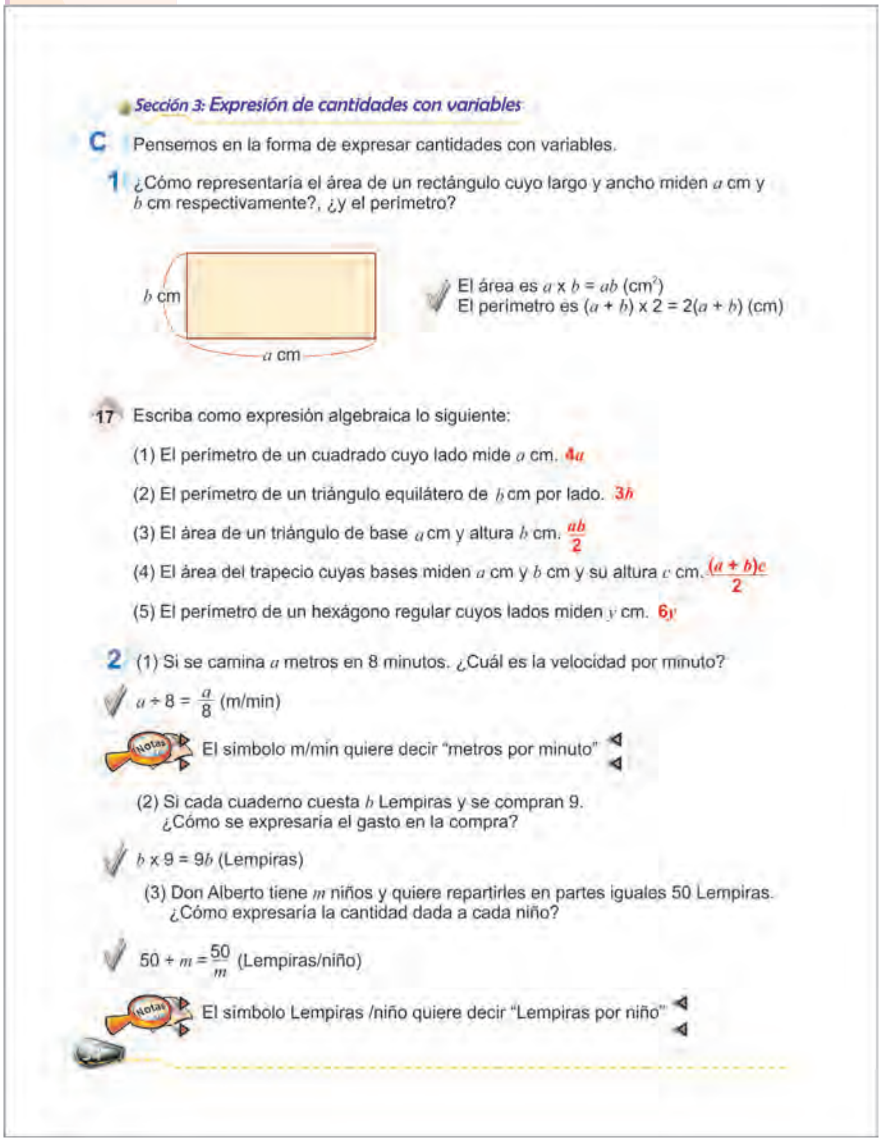
RP: $50 \div m = \frac{50}{m}$ (Lempiras)

Lección 1: (9~10/12)

Variables y expresiones

Objetivo: • Expresar cantidades con variables.

Materiales:



Sección 3: Expresión de cantidades con variables

C Pensemos en la forma de expresar cantidades con variables.

1 ¿Cómo representaría el área de un rectángulo cuyo largo y ancho miden a cm y b cm respectivamente?, ¿y el perímetro?

b cm

a cm

El área es $a \times b = ab$ (cm^2)
El perímetro es $(a + b) \times 2 = 2(a + b)$ (cm)

17 Escriba como expresión algebraica lo siguiente:

(1) El perímetro de un cuadrado cuyo lado mide a cm. $4a$

(2) El perímetro de un triángulo equilátero de b cm por lado. $3b$

(3) El área de un triángulo de base a cm y altura b cm. $\frac{ab}{2}$

(4) El área del trapecio cuyas bases miden a cm y b cm y su altura c cm. $\frac{(a+b)c}{2}$

(5) El perímetro de un hexágono regular cuyos lados miden y cm. $6y$

2 (1) Si se camina a metros en 8 minutos. ¿Cuál es la velocidad por minuto?

$a \div 8 = \frac{a}{8}$ (m/min)

Notas: El símbolo m/min quiere decir "metros por minuto"

(2) Si cada cuaderno cuesta b Lempiras y se compran 9.
¿Cómo se expresaría el gasto en la compra?

$b \times 9 = 9b$ (Lempiras)

(3) Don Alberto tiene m niños y quiere repartirles en partes iguales 50 Lempiras.
¿Cómo expresaría la cantidad dada a cada niño?

$50 \div m = \frac{50}{m}$ (Lempiras/niño)

Notas: El símbolo Lempiras /niño quiere decir "Lempiras por niño"

Lección 1: (9~10/12)

Variables y expresiones

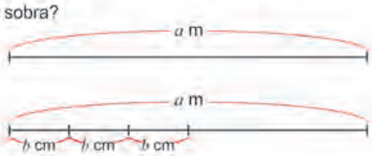
[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

3 Se cortan de un cordón, de a m de longitud, 3 partes de b cm de longitud.

¿Cuál es la longitud de la parte que sobra?



$100 \times a - b \times 3 = 100a - 3b$ (cm)

Nota: Como 1 m = 100 cm entonces a m = $a \times (100 \text{ cm}) = 100\,a$ cm.

18 Exprese en metros la longitud del cordón del problema anterior.

$a - \frac{3b}{100}$ (m)

4 ¿Cuál es el número cuya decena es a y cuya unidad es b?

$10 \times a + b = 10a + b$

19 Exprese la cantidades en EA.

(1) El número cuya unidad es a, la decena es b y la centena es c.

$100c - 10b + a$

(2) La cantidad de naranjas que quedan en el árbol si se cosechan b naranjas de a naranjas que habían.

$(a - b)$ naranjas

(3) ¿Cuál es la longitud en cm de la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden b cm cada uno y el perímetro 50 cm?

$(50 - 2b)$ cm

(4) ¿Cuál es la longitud en cm de cada uno de los lados iguales de un trapecio isósceles cuyas bases miden a y b cm respectivamente, si se sabe que el perímetro es 20 cm?

$\frac{20 - (a + b)}{2}$ (cm); $\frac{20 - a - b}{2}$ (cm)

(5) De una cabuya que mide 2 yardas se cortaron 5 pedazos que miden y pulgadas cada uno. ¿Cuál es la longitud de la parte que sobra?

$72 - 5y$ (pulg.); $2 - \frac{5y}{36}$ (yardas)

20 Inventen un problema cuya respuesta es $(3b + 50)\,n$ Lempiras.

En una clase hay n niños, cada uno tiene que comprar un bolígrafo de 50 Lempiras y tres cuadernos de b Lempiras cada uno. ¿Cuál es la cantidad total que pagan éstos niños?

55

1. Comentar lo observado en el problema. [C3]

* Indicarles que hagan la representación gráfica del problema.

M: ¿Cómo son las unidades de medida que se dan?, ¿cuáles son?, ¿qué hay que hacer?

RP: Son distintas, metros y centímetros, hay que convertir los metros a centímetros o viceversa.

M: Si trabajamos con centímetros ¿Cómo se expresaría la longitud del cordón?

RP: Multiplicando por 100, 100 x a, $100a$.

M: ¿Cómo se expresarían las partes que se cortan?

RP: b x 3, $3b$.

M: ¿Cómo se expresa la longitud de la parte que sobra?

RP: $100a - 3b$ (centímetros)

2. Resolver 18.

3. Comentar lo observado en el problema. [C4]

M: ¿Cuál es el número cuya decena es a y cuya unidad es b?

M: ¿Qué características tienen los números que están formados por decenas exactas?

RP: Terminan en cero, son múltiplos de 10.

M: ¿Cómo se puede expresar un número cuya decena es a?

RP: 10 x a, $10a$.

M: ¿Qué características tienen los números que están formados sólo por unidades?

RP: Tienen sólo un dígito, la unidad es el mismo número.

M: ¿Cómo se puede expresar un número cuya unidad es b?

RP: Como b.

M: ¿Cómo se puede representan el número cuya decena es a y la unidad es b?

RP: 10 x $a + b$, $10a + b$.

4. Resolver 19 y 20.

1. Comentar lo observado en el problema. [D1]

M: Si se sabe que la cantidad total de fósforos que se necesita para formar a cuadrados es $3a + 1$, ¿qué se hace para saber la cantidad de fósforos que se necesita para formar 50 cuadrados?

RP: Multiplicar 50 por 3 y sumarle 1, sustituir a por 50 en la expresión algebraica.

2. Sustituir el valor de las variables y hacer el cálculo.

M: ¿Cuál es el valor de a?

RP: 50.

M: Si sustituimos a por 50 en $3a + 1$ ¿cuál es el resultado?

RP: $3a + 1 = 3 \times 50 + 1 = 151$

* Concluir que se sustituye las variables por los números.

3. Llamar valor numérico a este tipo de valores obtenidos.

4. Calcular el valor numérico. [D2]

M: ¿Cuál es el valor numérico de $2 - 3a$ si $a = 4$?

RP: $2 - 3a = 2 - 3 \times 4 = 2 - 12$
$= -10$

* Concluir que el valor numérico es -10.

M: ¿Cuál es el valor numérico de $3a - 5b$ si $a = 2$ y $b = 7$?

RP: $3a - 5b = 3 \times 2 - 5 \times 7 = 6 - 35 = -29$.

* Concluir que el valor numérico es -29.

5. Resolver 21.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (11~12/12) Variables y expresiones

Objetivo: • Calcular el valor numérico de expresiones algebraicas.

Materiales:

Sección 4: Valor numérico de expresiones algebraicas

D Ahora calculemos sustituyendo las variables por números.

En el ejemplo de la formación de cuadrados con fósforos al comienzo de la sección 1, la cantidad total de fósforos que se necesita para formar a cuadrados es $3a + 1$.

1 Para encontrar la cantidad de fósforos que se necesita para formar 50 cuadrados, ¿qué se hace? ¿Cuántas fósforos se necesitan?

Se sustituye a por 50, es decir $3a + 1 = 3 \times 50 + 1 = 150 + 1 = 151$ (fósforos)

R: 151 fósforos.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el valor obtenido al sustituir las variables por números.

2 Encuentre el valor numérico de: (1) $2 - 3a$ si $a = 4$
(2) $3a - 5b$ si $a = -2$ y $b = 7$

(1) $2 - 3a$ si $a = 4$

$$\begin{aligned} 2 - 3a &= 2 - 3 \times 4 \\ &= 2 - 12 \\ &= -10 \end{aligned}$$

El valor numérico de $2 - 3a$ cuando $a = 4$ es -10

(2) $3a - 5b$ si $a = -2$ y $b = 7$

$$\begin{aligned} 3a - 5b &= 3 \times (-2) - 5 \times 7 \\ &= -6 - 35 \\ &= -41 \end{aligned}$$

El valor numérico de $3a - 5b$ cuando $a = -2$ y $b = 7$ es -41

21 Encuentre el valor numérico para los valores que se indican.

(1) $11x$; $x = 2$ **22**
(2) $2x - y$; $x = 1$, $y = -2$ **4**
(3) $1 + 2x$; $x = -1$ **-1**
(4) $a - 2b$; $a = -1$, $b = 0$ **-1**
(5) $2x - 5$; $x = 2.5$ **0**
(6) $20a$; $a = 7$ **140**
(7) $a + 6$; $a = -10$ **-4**
(8) $3 + 2a$; $a = -5$ **-7**
(9) $5ab$; $a = 1$, $b = -3$ **-15**
(10) $-20a + 15b$; $a = -3$, $b = 5$ **135**

Lección 1: (11~12/12)

Variables y expresiones

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

3 Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones:

(1) $-a$ si $a = -3$

(2) a^2 si $a = -3$

(3) $\frac{4+m}{n}$ si $m = -6$, $n = 4$

(1) $-a = -(-3)$
$= 3$

(2) $a^2 = (-3)^2$
$= 9$

(3) $\frac{4+m}{n} = \frac{4+(-6)}{4}$
$= \frac{4-6}{4}$
$= \frac{-2}{4}$
$= -\frac{1}{2}$

22 Encuentre el valor numérico para los valores que se indican.

(1) $\frac{2a}{3}$; $a = 6$ **4**

(2) $\frac{4}{a+3}$; $a = -1$ **2**

(3) $-a$; $a = -3$ **3**

(4) $-a^2$; $a = 3$ **-9**

(5) $\frac{n+2}{p}$; $n = 7$, $p = 3$ **3**

(6) a^2; $a = -3$ **9**

(7) $\frac{-a-b}{p}$; $a = 4$, $b = -2$, $p = 2$ **-1**

(8) $\frac{c-4}{b}$; $c = -5$, $b = 3$ **-3**

(9) a^2; $a = -5$ **25**

(10) $\frac{a-3}{b}$; $a = 0$, $b = 3$ **-1**

... viene de la página anterior.

6. Calcular el valor numérico. [D3]

M: Si $a = -3$ ¿Cuál es el valor numérico de $-a$?

RP: $-a = -(-3) = 3$

M: Si $a = -3$ ¿Cuál es el valor numérico de a^2?

RP: $a^2 = (-3)^2 = 9$

M: ¿Cuál es el valor numérico de $\frac{4+m}{n}$ si $m = -6$ y $n = 4$?

RP: $\frac{4+m}{n} = \frac{4+(-6)}{4} = -\frac{2}{4}$

$= -\frac{1}{2}$

* Aquí hay ejercicios donde se sustraen números negativos.

7. Resolver 22.

1. Expresar una sustracción como una adición. [A]

M: ¿Cómo puede expresarse 5 - 3 como una adición?

RP: Como 5 + (-3).

M: ¿Cómo puede expresarse la expresión algebraica $3a - 4b + 9$ como una adición?

RP: Como $3a + (-4b) + 9$.

* Indicar que cada uno de los sumandos en $3a + (-4b) + 9$ es un término de la EA.
* Indicar que el número de cada término.

2. Identificar los términos y los coeficientes en las EA. [A1]

M: En $3a + (-4b) + 9$ ¿cuáles son los términos y los coeficientes de cada variable?

RP: Los términos son $3a$; $-4b$ y 9. El coeficiente de a es 3 y de b es -4.

M: ¿Cuál es el coeficiente de a?

RP: Es 1.

M: ¿Cuál es el coeficiente de $-a$?

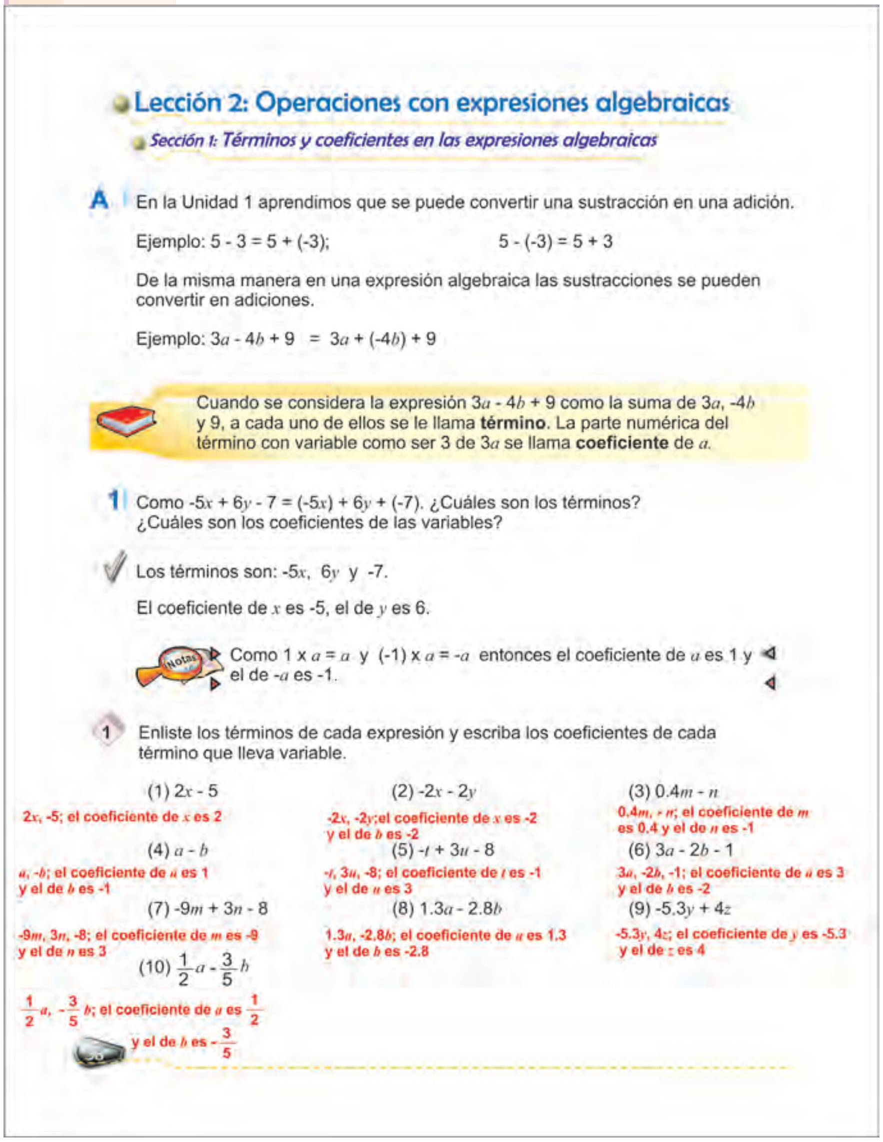
RP: Es -1.

3. Resolver 1.

Lección 2: (1/13) Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo:
- Identificar los términos y los coeficientes en las expresiones algebraicas.
- Calcular el producto de una expresión algebraica por un número.

Materiales:



Lección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Sección 1: Términos y coeficientes en las expresiones algebraicas

A En la Unidad 1 aprendimos que se puede convertir una sustracción en una adición.

Ejemplo: 5 - 3 = 5 + (-3); 5 - (-3) = 5 + 3

De la misma manera en una expresión algebraica las sustracciones se pueden convertir en adiciones.

Ejemplo: $3a - 4b + 9 = 3a + (-4b) + 9$

Cuando se considera la expresión $3a - 4b + 9$ como la suma de $3a$, $-4b$ y 9, a cada uno de ellos se le llama **término**. La parte numérica del término con variable como ser 3 de $3a$ se llama **coeficiente** de a.

1 Como $-5x + 6y - 7 = (-5x) + 6y + (-7)$. ¿Cuáles son los términos? ¿Cuáles son los coeficientes de las variables?

Los términos son: $-5x$, $6y$ y -7.

El coeficiente de x es -5, el de y es 6.

Notas: Como $1 \times a = a$ y $(-1) \times a = -a$ entonces el coeficiente de a es 1 y el de $-a$ es -1.

1 Enliste los términos de cada expresión y escriba los coeficientes de cada término que lleva variable.

(1) $2x - 5$

$2x$, -5; el coeficiente de x es 2

(2) $-2x - 2y$

$-2x$, $-2y$; el coeficiente de x es -2 y el de b es -2

(3) $0.4m - n$

$0.4m$, $-n$; el coeficiente de m es 0.4 y el de n es -1

(4) $a - b$

a, $-b$; el coeficiente de a es 1 y el de b es -1

(5) $-t + 3u - 8$

$-t$, $3u$, -8; el coeficiente de t es -1 y el de u es 3

(6) $3a - 2b - 1$

$3a$, $-2b$, -1; el coeficiente de a es 3 y el de b es -2

(7) $-9m + 3n - 8$

$-9m$, $3n$, -8; el coeficiente de m es -9 y el de n es 3

(8) $1.3a - 2.8b$

$1.3a$, $-2.8b$; el coeficiente de a es 1.3 y el de b es -2.8

(9) $-5.3y + 4z$

$-5.3y$, $4z$; el coeficiente de y es -5.3 y el de z es 4

(10) $\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b$

$\frac{1}{2}a$, $-\frac{3}{5}b$; el coeficiente de a es $\frac{1}{2}$ y el de b es $-\frac{3}{5}$

Lección 2:

Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo: (2~3/13)

* Calcular el producto de una expresión algebraica por un número.
* Calcular la división de una expresión algebraica entre un número.
* Simplificar a su mínima expresión una EA.

Sección 2: Producto y división de expresiones algebraicas por un número

B1 Vamos a multiplicar EA por un número.

(1) $2a \times 3 = (2 \times a) \times 3$
$= 2 \times (a \times 3)$ ..... Propiedad asociativa
$= 2 \times (3 \times a)$ ..... Propiedad conmutativa
$= (2 \times 3) \times a$ ..... Propiedad asociativa
$= 6a$

(2) $(-2a) \times (-3) = (-2) \times (-3) \times a$
$= 6a$

(3) $2a \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times a$
$= 1 \times a$
$= a$

(4) $2a \times (-\frac{1}{2}) = 2 \times (-\frac{1}{2}) \times a$
$= -1 \times a$
$= -a$

2 Calcule.

(1) $5m \times 3$ $15m$ (2) $-8t \times (-2)$ $16t$ (3) $\frac{3a}{4} \times \frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}a$ (4) $0.4a \times 5$ $2a$ (5) $3a \times (-7)$ $-21a$

(6) $-7m \times 0.8$ $-5.6m$ (7) $m \times (\frac{2}{3})$ $\frac{2}{3}m$ (8) $-3.1a \times (-3.1)$ $9.61a$ (9) $-5b \times 3$ $-15b$ (10) $-\frac{1}{3}a \times 12$ $-4a$

Ahora para la división se utilizará el proceso de escribirla como una fracción y luego se simplificará directamente. Ejemplo:

$$4a \div 6 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}a}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{2a}{3}$$

2 Vamos a dividir $4a$ entre 6.

$4a \div 6 = 4a \times \frac{1}{6}$
$= 4 \times \frac{1}{6} \times a$
$= \frac{2}{3}a$

Dividir por un número equivalente a multiplicar por su inverso multiplicando.

Notas

$\frac{2}{3}a = (2 \times \frac{1}{3}) \times a$
$= (2 \times a) \times \frac{1}{3}$
$= \frac{2a}{3}$

39

Indicar que se puede utilizar cualquiera de dos formas, $\frac{2}{3}a$ y $\frac{2a}{3}$.

1. **Calcular el producto de una EA por un número. [B1]**

M: ¿Cómo podemos encontrar el producto de $2a \times 3$?

RP: Multiplicando. Multiplicando primero 2×3 y agregando la variable a.

* Indicar que se multiplican los números y se multiplica la variable (hacer énfasis en la aplicación de las propiedades para un mejor entendimiento).

* Desarrollar los demás ejemplos.

2. **Resolver 2.**

3. **Pensar en la forma de dividir entre un número. [B2]**

M: ¿Cómo puede hacer la división $4a \div 6$?

RP: Como $4a \times \frac{1}{6}$, por su inverso multiplicativo.

M: ¿Cómo puede calcularse este producto?

RP: Multiplicando 4 por 1 y copiando la variable y el 6.

M: ¿Se puede simplificar este producto?, ¿cómo?

RP: Sí, sacando mitad tanto al numerador como al denominador.

M: ¿Hay otra forma?

RP: Escribiendo la división en la forma de fracción.

* Indicar que ahora para la división se utilizará el proceso de escribirla como una fracción y luego simplificarla directamente.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

4. Resolver 3.

* Dejar la respuesta simplificada.

5. Expresar una división como una multiplicación. [B3]

M: ¿Qué hacemos para calcular $4a \div \frac{3}{5}$?

RP: Como $4a \times \frac{5}{3}$.

M: ¿Cómo puede calcularse este producto?

RP: Multiplicando 4 por 5 y copiando la variable y el 3.

6. Resolver 4.

Lección 2: (2~3/13) Operaciones con expresiones algebraicas

[Continuación]

3 Simplifique a la mínima expresión.

(1) $6a \div 8$ $\frac{3}{4}a, \frac{3a}{4}$

(2) $(-6a) \div 8$ $-\frac{3}{4}a, -\frac{3a}{4}$

(3) $6a \div (-8)$ $-\frac{3}{4}a, -\frac{3a}{4}$

(4) $-6a \div (-8)$ $\frac{3}{4}a, \frac{3a}{4}$

(5) $8a \div 4$ $2a$

(6) $25m \div 40$ $\frac{5}{8}m, \frac{5m}{8}$

(7) $-2a \div 4$ $-\frac{1}{2}a, -\frac{a}{2}$

(8) $-30a \div (-40)$ $\frac{3}{4}a, \frac{3a}{4}$

(9) $-12t \div 16$ $-\frac{3}{4}t, -\frac{3t}{4}$

(10) $45x \div 30$ $\frac{3}{2}x, \frac{3x}{2}$

Notas: De ahora en adelante cuando una EA tiene la forma de fracción se utilizará su mínima expresión.

3 Ejemplo.

$$4a \div \frac{3}{5} = 4a \times \frac{5}{3}$$
$$= 4 \times \frac{5}{3} \times a$$
$$= \frac{20}{3}a$$

4 Calcule.

(1) $-3a \div \frac{6}{5}$ $-\frac{5}{2}a$

(2) $-8m \div \frac{4}{7}$ $-14m$

(3) $-x \div \left(-\frac{1}{4}\right)$ $4x$

(4) $-\frac{3}{4}a \div \left(-\frac{3}{8}\right)$ $2a$

(5) $\frac{3}{5}m \div \frac{7}{10}$ $\frac{6}{7}m$

(6) $\frac{2}{3}t \div \left(-\frac{8}{9}\right)$ $-\frac{3}{4}t$

(7) $-6t \div \frac{3}{2}$ $-4t$

(8) $(-6t) \div \left(-\frac{3}{2}\right)$ $4t$

(9) $6t \div \left(-\frac{2}{3}\right)$ $-9t$

(10) $6t \div \frac{2}{3}$ $9t$

60

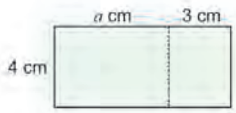
Lección 2: (4/13)

Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo: • Calcular la multiplicación de un número por una expresión algebraica de dos términos.

Materiales:

4 ¿Cómo se puede expresar el área del siguiente rectángulo?



La base del rectángulo es $(a + 3)$ cm y la altura es 4 cm.

Aplicando la fórmula del área de un rectángulo ($b \times h$) resulta:

$(a + 3) \times 4 = 4(a + 3)$ ....Propiedad conmutativa
$= 4a + 4 \times 3$ .... Propiedad distributiva
$= 4a + 12$
R: $(4a + 12)\ cm^2$

5 Ejemplo

(1) $2(3a - 4) = 2 \times \{3a + (-4)\}$
$= 2 \times 3a + 2 \times (-4)$
$= 6a - 8$

(2) $(2a - 3)(-4) = \{2a + (-3)\} \times (-4)$
$= 2a \times (-4) + (-3) \times (-4)$
$= -8a + 12$

(3) $-(2a - 3) = (-1) \times \{2a + (-3)\}$
$= (-1) \times 2a + (-1) \times (-3)$
$= -2a + 3$

(4) $-\frac{1}{2}(-\frac{8}{3}b + \frac{6}{5}) = -\frac{1}{2} \times \{(-\frac{8}{3})b + \frac{6}{5}\}$
$= (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{8}{3})b + (-\frac{1}{2}) \times \frac{6}{5}$
$= \frac{4}{3}b - \frac{3}{5}$

Notas: Cuando se acostumbre a este proceso se omitirá el signo por (x) que se escribe entre paréntesis.
Ejemplo: $(2a - 3)(-4) = 2a(-4) - 3(-4) = -8a + 12$

5 Calcule.

(1) $4(3b + 1)$ **$12b + 4$**
(2) $-3(x - 2)$ **$-3x + 6$**
(3) $8(2x - 1)$ **$16x - 8$**
(4) $-5(8m - 3)$ **$-40m + 15$**
(5) $(3p + 5)(-3)$ **$-9p - 15$**
(6) $(4x + 1)4$ **$16x + 4$**
(7) $-(-8t + 5)$ **$8t - 5$**
(8) $-(2b - 11)$ **$-2b + 11$**
(9) $(-4z - 1)(-2)$ **$8z + 2$**
(10) $(7m - 2)(-5)$ **$-35m + 10$**
(11) $\frac{3}{4}(2a - b)$ **$\frac{3}{2}a - \frac{3}{4}b$**
(12) $-\frac{5}{3}(3a - \frac{3}{2}b)$ **$-5a + \frac{5}{2}b$**

61

1. **Comentar lo observado en el problema. [B4]**

M: ¿Cuánto mide el ancho (altura) del rectángulo?

RP: 4 cm.

M: ¿Cuánto mide el largo (base) del rectángulo?, ¿cómo puede expresarse?

RP: a cm + 3 cm, $(a + 3)$ cm

M: ¿Cuál es la fórmula del área de un rectángulo?

RP: Largo por ancho, ancho por largo, base por altura, $b \times h$, $h \times b$.

M: ¿Cómo puede expresarse el área del rectángulo anterior?

RP: Como $4 \times (a + 3)$, $(a + 3) \times 4$.

2. **Realizar el cálculo.**

* Indicar que aplicando las propiedades se determina que $(a + 3) \times 4 = 4a + 12$.
* Indicar que $-(-5) = (-1) \times (-5) = 5$, para que lo generalicen a este tipo de situaciones.

3. **Realizar el cálculo. [B5]**

* Desarrollar los ejemplos (1) ~ (4) haciendo énfasis en la propiedad conmutativa.

4. **Resolver 5.**

Lección 2: (5~6/13) Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo:

- Calcular la multiplicación de un número por una EA de dos términos con denominador.
- Calcular la división de una EA de dos términos entre un número.

Materiales:

1. Realizar el cálculo. [B6]

M: ¿Cómo se puede realizar $\frac{3a + 4}{5} \times 10$?

RP: Multiplicando 10 con cada término aplicando la propiedad distributiva, simplificando primero 10 con 5, etc.

* Si los estudiantes no dan ideas pídales que observen el 10 del numerador y el 5 del denominador.

M: ¿Cuál es el resultado de simplificar 10 del numerador con 5 del denominador?

RP: $\frac{2}{1}$, 2.

M: ¿Qué puede hacerse con el 1 que queda como denominador?

RP: Eliminarlo, no trabajar con él, la división entre 1 da lo mismo, etc.

M: ¿Cuál es el resultado de $(3a + 4) \times 2$?

RP: $6a + 8$.

2. Realizar el cálculo.

M: ¿Qué hay que hacer para encontrar el resultado de $\frac{3a + 4}{5} \times 7$?

RP: Multiplicar el numerador por 7 y copiar el denominador 5.

* Indicar que cuando no se puede simplificar hay que multiplicar los datos del numerador y copiar el denominador.

3. Resolver 6.

4. Expresar la división como una multiplicación y realizar el cálculo. [B7]

M: ¿Cómo puede expresarse $(6a + 10) \div 4$ como una multiplicación?

* Indicar que se utiliza el inverso multiplicativo y se aplica la propiedad distributiva.

6 Ejemplo

(1) $\frac{3a + 4}{5} \times 10 = \frac{(3a + 4) \times 10}{5} = \frac{(3a + 4) \times 2}{1} = 6a + 8$

[Recuerde que $\frac{3}{5} \times 10 = \frac{3 \times 10}{5}$]

(2) $\frac{3a + 4}{5} \times 7 = \frac{(3a + 4) \times 7}{5} = \frac{21a + 28}{5}$

Notas: Usar paréntesis. Simplificar primero.

También se calcula como se muestra a continuación

$\frac{3a + 4}{5} \times 10 = (3a + 4) \times 2 = 6a + 8$

6 Calcule.

(1) $\frac{5m + 1}{9} \times 3$ — $\frac{5m + 1}{3}$
(2) $\frac{a - 1}{7} \times 21$ — $3a - 3$
(3) $\frac{5a - 7}{12} \times 2$ — $\frac{5a - 7}{6}$
(4) $\frac{11t + 1}{4} \times 8$ — $22t + 2$
(5) $\frac{t - 9}{5} \times 20$ — $4t - 36$
(6) $\frac{3t - 1}{2} \times 6$ — $9t - 3$
(7) $\frac{2y - 7}{3} \times 15$ — $10y - 35$
(8) $\frac{3y - 4}{25} \times 5$ — $\frac{3y - 4}{5}$
(9) $\frac{5t - 1}{3} \times 4$ — $\frac{20t - 4}{3}$
(10) $\frac{-3b - 7}{3} \times 2$ — $\frac{-6b - 14}{3}$

7 Ejemplo

$(6a + 10) \div 4 = (6a + 10) \times \frac{1}{4} = 6a \times \frac{1}{4} + 10 \times \frac{1}{4} = \frac{3a}{2} + \frac{5}{2}$

ó

$(6a + 10) \div 4 = \frac{6a + 10}{4} = \frac{3a + 5}{2}$

Notas: En la forma derecha es importante que todos los términos $6a$, 10 y 4 se dividan entre 2 (2 es el MCD de 6, 10 y 4).

7 Calcule.

(1) $(8m - 12) \div 20$ — $\frac{2m - 3}{5}$
(2) $(12t - 18) \div 24$ — $\frac{2t - 3}{4}$
(3) $(16x + 36) \div 20$ — $\frac{4x + 9}{5}$
(4) $(5t - 10) \div 15$ — $\frac{t - 2}{3}$
(5) $(6t + 12) \div 30$ — $\frac{t + 2}{5}$
(6) $(18b - 24) \div 42$ — $\frac{3b - 4}{7}$
(7) $(6r + 15) \div 24$ — $\frac{2r + 5}{8}$
(8) $(6x - 12) \div 14$ — $\frac{3x - 6}{7}$
(9) $(12z + 24) \div 27$ — $\frac{4z + 8}{9}$
(10) $(20y - 8) \div 40$ — $\frac{5y - 2}{10}$

5. Simplificar la división utilizando el MCD.

* Indicar que se simplifica utilizando el MCD del numerador y el denominador (si existe).

* Indicar que ahora se utilizará este proceso de simplificación cuando se pueda.

6. Resolver 7.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: **(5~6/13)**

Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo: [Continuación]

Materiales:

8 Ejemplo.

$(3a + 15) \div \frac{3}{4} = (3a + 15) \times \frac{4}{3}$
$= 3a \times \frac{4}{3} + 15 \times \frac{4}{3}$
$= 4a + 20$

ó

$(3a + 15) \div \frac{3}{4} = (3a + 15) \times \frac{3}{4}$ [sic]
$= \frac{(3a + 15)\ 4}{3}$
$= \frac{(\overset{1}{3}a + \overset{5}{15})\ 4}{\underset{1}{3}}$
$= 4a + 20$

8 Calcule.

(1) $(10n + 15) \div \frac{5}{3}$ — $6n + 9$

(2) $(20a - 8) \div \frac{4}{3}$ — $15a - 6$

(3) $(21t - 9) \div \left(-\frac{3}{7}\right)$ — $-49t + 21$

(4) $(5x - 25) \div \frac{5}{6}$ — $6x - 30$

(5) $(12b + 20) \div \frac{4}{3}$ — $9b + 15$

(6) $(15x - 2) \div \frac{3}{2}$ — $10x - \frac{4}{3}$

(7) $(8m - 3) \div \left(-\frac{4}{5}\right)$ — $-10m + \frac{15}{4}$

(8) $(14a - 5) \div \frac{7}{2}$ — $4a - \frac{10}{7}$

(9) $(42y + 5) \div \frac{2}{3}$ — $63y + \frac{15}{2}$

(10) $(24d - 7) \div \frac{8}{3}$ — $9d - \frac{21}{8}$

(11) $(16m + 12) \div \frac{6}{5}$ — $\frac{40}{3}m + 10$

(12) $(12h - 18) \div \frac{9}{8}$ — $\frac{32}{3}h - 16$

63

... viene de la página anterior.

7. Realizar el cálculo. [B8]

* Indicar que el ejemplo puede realizarse de las dos formas.

M: ¿Cómo puede expresarse $(3a + 15) \div \frac{3}{4}$ como una multiplicación?

RP: Utilizando el inverso multiplicativo, como $(3a + 15) \times \frac{4}{3}$.

* Indicar que encuentren el resultado.

8. Resolver 8 .

* Simplificar los numeradores y denominadores de la expresión algebraica.

1. **Expresar el área del retángulo en dos formas. [C1]**

M: ¿Cuál es el área de cada uno de los rectángulos de la figura?

* Ayudarles a ver que son 3 rectángulos los que tiene la figura

RP: $2am^2$, $3am^2$, total $5am^2$

* Concluir de éste ejemplo que la suma de las dos áreas pequeñas es igual al área del rectángulo mayor.

2. **Llamar términos semejantes a este tipo de términos.**

* Que si dos términos tienen la misma variable con el mismo exponente éstos son semejantes.

* Indicar que identifiquen los términos semejantes en $2a + 3a - 5a + 6b - 7b + 8a^2 + 9a^2 + 10 - 13$.

* Concluir que la propiedad distributiva permite escribir varios términos semejantes como uno solo.

3. **Expresar como un solo término. [C2]**

* Indicar que apliquen la propiedad distributiva.

* Concluir que se suman los números y se copia la variable común.

4. **Resolver 9.**

* Desarrollar algunos ejercicios en clase y dejar el resto para tarea.

5. **Sumar expresiones algebraicas. [C3]**

M: En $2a + 5 + 3a - 4$ ¿cuáles son los términos semejantes?, ¿cómo pueden sumarse?

RP: $2a$ y $3a$; 5 y -4; los que tiene variables y los que no tienen variables. Pueden sumarse los términos semejantes.

Lección 2: (7~8/13)

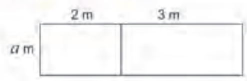
Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo:
- Identificar términos semejantes.
- Expresar como un sólo término varios términos semejantes.
- Sumar expresiones algebraicas.

Materiales:

Sección 3: Adición y sustracción de expresiones algebraicas

C1 Encuentre el área de las dos partes pequeñas y el área total del rectángulo.



$2am^2$, $3am^2$ total $5am^2$

Notas: De este ejemplo sabemos que $2a + 3a = (2+3)a = 5a$.

Dos o más **términos** son **semejantes** si tienen la misma variable con el mismo exponente.

Ejemplo:
En la expresión $2a + 3a - 5a + 6b - 7b + 8a^2 + 9a^2 + 10 - 13$ hay 4 grupos de términos semejantes: $2a$, $3a$ y $-5a$; $6b$ y $-7b$; $8a^2$ y $9a^2$; 10 y -13.

Aplicando la propiedad distributiva dos o más términos semejantes se pueden escribir como un solo término.

2 Ejemplo

(1) $2a + 3a = (2 + 3)a = 5a$ (2) $3a - 5a = (3 - 5)a = -2a$ (3) $4b - b = (4 - 1)b = 3b$

9 Escriba como un solo término.

(1) $6c - 8c$ $-2c$ (2) $-4d + 7d$ $3d$ (3) $5m - 8m - 5m$ $-8m$

(4) $-6k - 7k - 9k$ $-22k$ (5) $5m + 3m - 10m + 4m$ $2m$ (6) $-5b + 3b - 7b + 5b$ $-4b$

(7) $-4x - x + 2x + x + 8x$ $6x$ (8) $11n - 7n + 5n - 3n - n$ $5n$ (9) $\frac{7}{9}a - \frac{1}{9}a + \frac{5}{9}a - \frac{8}{9}a$ $\frac{1}{3}a$

(10) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a - \frac{1}{5}a$ $\frac{13}{60}a$ (11) $2.3a - 5.1a + 8.9a - a$ $5.1a$ (12) $3a - 0.8a + 2.4a + 3.6a$ $8.2a$

(13) $7.3a + 6.5a - 1.3a - a$ $11.5a$ (14) $4.1a - 1.1a - 3.4a$ $-0.4a$

3 Ejemplo

(1) $2a + 5 + 3a - 4 = 2a + 3a + 5 - 4$ ...... Se agrupan los términos semejantes
$= 5a + 1$ .... Se suman separadamente

(2) $3m - 5n + 8n - 8m = 3m - 8m - 5n + 8n$ ... Se agrupan los términos semejantes
$= -5m + 3n$ .... Se suman separadamente

Reducir una expresión algebraica consiste en agrupar los términos semejantes y sumarlos separadamente.

* Indicar que deben agruparse los términos semejantes y sumarlos separadamente.

* Desarrollar el ejemplo (2).

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (7~8/13)

Operaciones con expresiones algebraicas

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

10 Reduzca las siguientes expresiones.

(1) $5a + 6a - 3 - 4$ $11a - 7$ (2) $0.3a - 1.5b + 3.4a + 0.4b$ $3.7a - 1.1b$

(3) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}a - \frac{5}{4}a + \frac{5}{2}x$ $-\frac{7}{4}a + \frac{13}{4}x$ (4) $2a + 3a - 5 + 8 - 7a$ $-2a + 3$

(5) $10.4y - 6.1 - 9.3y + 4.5$ $1.1y - 1.6$ (6) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y$ $\frac{3}{4}x - \frac{8}{15}y$

(7) $25m + 23m - 31n - 18n$ $48m - 49n$ (8) $-3.1n + 5.3 + 7.9n - 8.3$ $4.8n - 3$

(9) $\frac{5}{8}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$ $\frac{9}{8}x - \frac{3}{8}$ (10) $4p - 2q - 8p - 5q$ $-4p - 7q$

4 Pensemos en la adición y la sustracción de expresiones algebraicas.

$(3a + 4) + (5a - 6) = \mathbf{(3a + 4) + \{5a + (-6)\}}$; en esta última expresión se pueden suprimir los paréntesis y las llaves debido a que por la propiedad conmutativa y asociativa se puede sumar en cualquier orden.

Entonces

$$\begin{aligned}(3a + 4) + (5a - 6) &= 3a + 4 + 5a + (-6)\\ &= 3a + 5a + 4 - 6\\ &= 8a - 2\end{aligned}$$

Notas: Comparando lo resaltado tenemos:
(3a + 4) + (5a - 6) = 3a + 5a + 4 - 6;
es decir que al sumar expresiones algebraicas podemos eliminar los paréntesis que separan las expresiones.

Por tanto, a partir de ahora se empleará el procedimiento de la adición siguiente:

$(3a + 4) + (5a - 6) = 3a + 4 + 5a - 6$............quitar paréntesis
$= 3a + 5a + 4 - 6$.............agrupar términos con variable
$= 8a - 2$

11 Calcule.

(1) $(-5x + 3) + (8x + 2)$ $3x + 5$ (2) $(3p + 4) + (p + 1)$ $4p + 5$

(3) $(-8m - 1) + (-2m - 9)$ $-10m - 10$ (4) $(5y - 2) + (-5y + 2)$ 0

(5) $(15b - 3) + (5b + 8)$ $20b + 5$ (6) $\left(\frac{3}{4}m - 1\right) + \left(\frac{1}{3}m + 2\right)$ $\frac{13}{12}m + 1$

(7) $\left(\frac{5}{9}r + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{13}{9}r + \frac{3}{2}\right)$ $2r + 2$ (8) $(5.3x - 1.1) + (-4.4x + 3.3)$ $0.9x + 2.2$

(9) $(0.4p + 5) + (-2.8p - 1.4)$ $-2.4p + 3.6$ (10) $(6.1a + 3.4) + (5.9a + 9.5)$ $12a + 12.9$

65

... viene de la página anterior.

6. Resolver 10.

7. Sumar expresiones algebraicas. [C4]

M: ¿Cómo puede expresarse como una adición sin paréntesis?

RP: $(3a + 4) + (5a - 6)$.

M: ¿Cómo podemos realizar la suma de $3a + 4 + 5a - 6$?

RP: Sumando los términos semejantes.

* Pedir que encuentren el resultado.

* Concluir que por la propiedad conmutativa y asociativa la suma puede realizarse en cualquier orden.

* Concluir que al sumar expresiones algebraicas se pueden eliminar los paréntesis que separan las expresiones y que luego se suman los términos semejantes por separado.

* Es muy importante demostrar este proceso con explicación.

* Indicar que de ahora en adelante se utilizará este procedimiento.

8. Resolver 11.

1. **Restar expresiones algebraicas. [C5]**

M: ¿Cómo podemos realizar la resta de $(5a + 4) - (2a + 6)$?

RP: Restando los términos semejantes.

M: ¿A quién influye el signo menos?

RP: A toda la expresión del paréntesis, influye a $(2a + 6)$.

M: ¿A qué equivale restar un número?

* Si los estudiantes tienen dificultad en responder plantee situaciones similares con números positivos y negativos para que hagan la relación. Ejemplo:
(+10) - (+14); (-9) - (-3).

* Concluir que restar un número equivale a sumar el número que tiene el signo inverso, asimismo equivale a multiplicar el sustraendo por -1 y luego efectuar la suma.

* Pedir que encuentren el resultado.

* Concluir que restar una expresión equivale a restar cada término de la expresión.

* Indicar que de ahora en adelante se utilizará este procedimiento para restar EA.

2. **Restar expresiones algebraicas. [C6]**

* Resolverlo en forma similar al ejercicio anterior.

* En éste ejemplo no está indicado el proceso de calcular coeficientes.

3. **Resolver 12.**

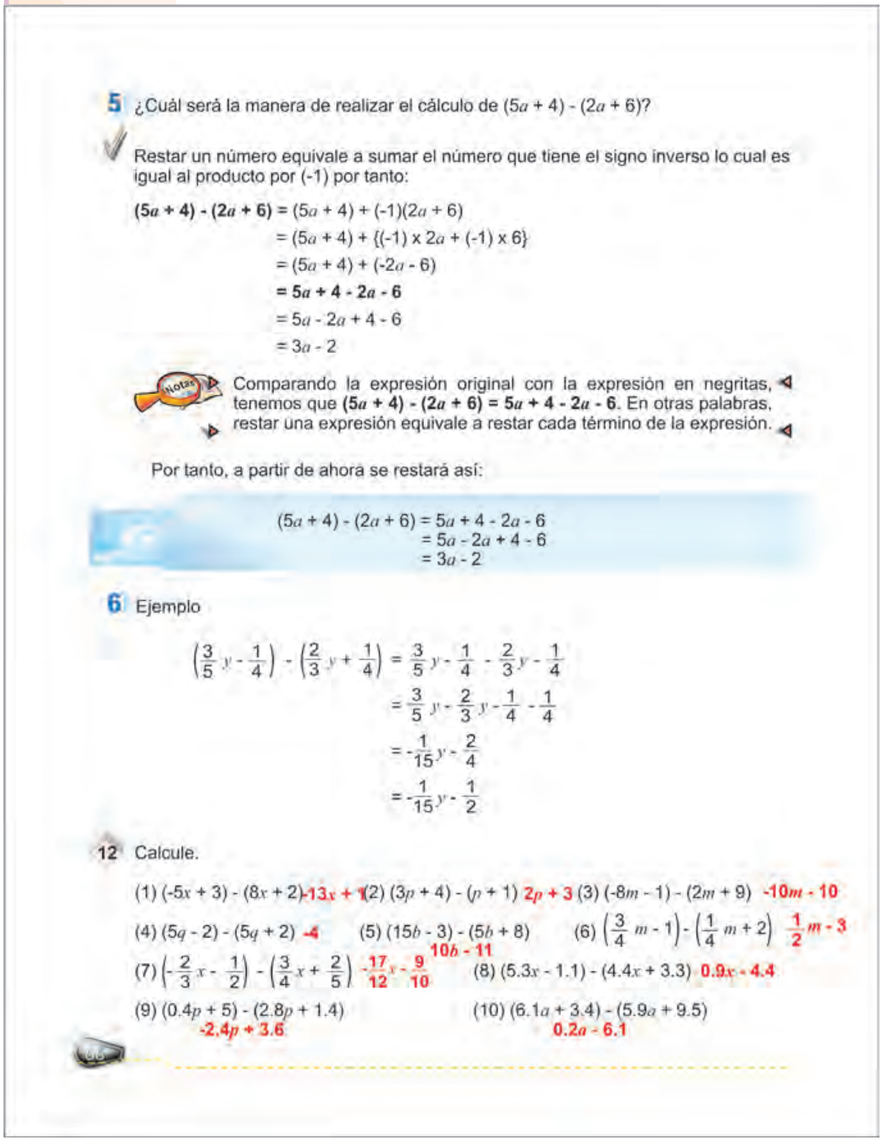
Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (9~11/13)

Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo: • Restar expresiones algebraicas.

Materiales:



5 ¿Cuál será la manera de realizar el cálculo de $(5a + 4) - (2a + 6)$?

Restar un número equivale a sumar el número que tiene el signo inverso lo cual es igual al producto por (-1) por tanto:

$$\begin{aligned}(5a + 4) - (2a + 6) &= (5a + 4) + (-1)(2a + 6)\\ &= (5a + 4) + \{(-1) \times 2a + (-1) \times 6\}\\ &= (5a + 4) + (-2a - 6)\\ &= 5a + 4 - 2a - 6\\ &= 5a - 2a + 4 - 6\\ &= 3a - 2\end{aligned}$$

Comparando la expresión original con la expresión en negritas, tenemos que **$(5a + 4) - (2a + 6) = 5a + 4 - 2a - 6$**. En otras palabras, restar una expresión equivale a restar cada término de la expresión.

Por tanto, a partir de ahora se restará así:

$$\begin{aligned}(5a + 4) - (2a + 6) &= 5a + 4 - 2a - 6\\ &= 5a - 2a + 4 - 6\\ &= 3a - 2\end{aligned}$$

6 Ejemplo

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5}y - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{4}\right) &= \frac{3}{5}y - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{5}y - \frac{2}{3}y - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\\ &= -\frac{1}{15}y - \frac{2}{4}\\ &= -\frac{1}{15}y - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

12 Calcule.

(1) $(-5x + 3) - (8x + 2)$ $-13x + 1$ (2) $(3p + 4) - (p + 1)$ $2p + 3$ (3) $(-8m - 1) - (2m + 9)$ $-10m - 10$

(4) $(5q - 2) - (5q + 2)$ -4 (5) $(15b - 3) - (5b + 8)$ $10b - 11$ (6) $\left(\frac{3}{4}m - 1\right) - \left(\frac{1}{4}m + 2\right)$ $\frac{1}{2}m - 3$

(7) $\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}\right)$ $-\frac{17}{12}x - \frac{9}{10}$ (8) $(5.3x - 1.1) - (4.4x + 3.3)$ $0.9x - 4.4$

(9) $(0.4p + 5) - (2.8p + 1.4)$ $-2.4p + 3.6$ (10) $(6.1a + 3.4) - (5.9a + 9.5)$ $0.2a - 6.1$

Lección 2: (9~11/13)

Operaciones con expresiones algebraicas

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

7 Ejemplo

$(5a + 4) - (2a - 6) = (5a + 4) - \{2a + (-6)\}$
$= 5a + 4 - 2a - (-6)$
$= 5a + 4 - 2a + 6$
$= 5a - 2a + 4 + 6$
$= 3a + 10$

Notas: Comparando la expresión original con la expresión resaltada en negrita se sabe que: $(5a + 4) - (2a - 6) = 5a + 4 - 2a + 6$

Observe que restar -6 equivale a sumar 6.

$a + (b + c) = a + b + c$ $\qquad a - (b + c) = a - b - c$
$a + (b - c) = a + b - c$ $\qquad a - (b - c) = a - b + c$

8 Ejemplo

$(0.75m - 5) - (-0.42m + 7) = 0.75m - 5 + 0.42m - 7$
$= 0.75m + 0.42m - 5 - 7$
$= 1.17m - 12$

13 Calcule.

(1) $(-4x + 2) - (8x - 3)$ $-12x + 5$
(2) $(7a + 1) - (3a - 1)$ $4a + 2$
(3) $(5x - 3) - (-8x - 2)$ $13x - 1$
(4) $(4p - 3) - (-p + 1)$ $5p - 4$
(5) $(8m - 1) - (8m - 3)$ 2
(6) $(-2q - 5) - (5q - 2)$ $-7q - 3$
(7) $\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}\right)$ $\frac{1}{12}x - \frac{1}{10}$
(8) $\left(\frac{7}{3}y - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{4}{3}y - \frac{1}{4}\right)$ $y - 1$
(9) $(-5.1x + 3) - (-0.8x - 1)$ $-4.3x + 4$
(10) $(3.4x - 6.1) - (-5.9x - 9.5)$ $9.3x + 3.4$

9 Ejemplo

$2(5a + 4) - 3(2a - 6) = 10a + 8 - 6a + 18$
$= 10a - 6a + 8 + 18$
$= 4a + 26$

14 Calcule.

(1) $3(5x - 8) - 4(6x + 1)$ $-9x - 28$
(2) $5(-x + 3) - 2(x + 1)$ $-7x + 13$
(3) $4(x + 1) + 3(2x - 1)$ $10x + 1$
(4) $8(2x + 3) - 2(3x + 5)$ $10x + 14$
(5) $2(-x + 4) - 3(x - 3)$ $-5x + 17$
(6) $9(2x - 3) + 10(3x - 4)$ $48x - 67$
(7) $4(-2x - 6) + (-5x - 10)$ $-13x - 34$
(8) $4(2.5x - 1.5) - 2(0.5x + 3)$ $9x - 12$
(9) $1.1(1.2x - 1) - 2.3(x + 2)$ $-0.98x - 5.7$
(10) $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{6}{8}x - \frac{9}{16}\right)$ $-\frac{1}{3}x + \frac{13}{12}$

67

... viene de la página anterior.

4. Restar expresiones algebraicas. [C7]

M: ¿Cómo podemos realizar la resta de $(5a + 4) - (2a - 6)$?

RP: Restando los términos semejantes.

M: ¿Qué sucede cuando hay un signo menos antes de una expresión dentro del paréntesis?

RP: Que los signos de los monomios de la EA cambian.

M: ¿A qué equivale restar una EA?

RP: Equivale a restar cada término de la expresión.

* Pedir que encuentren el resultado.
* Es importante resumir que el signo "+" no altera el signo de los términos dentro del paréntesis y que el signo "-" sí altera el signo de los términos dentro de los paréntesis.

5. Restar expresiones algebraicas. [C8]

* Resolverlo en forma similar al ejercicio anterior.

6. Resolver 13.

7. Restar EA que implican multiplicación. [C9]

M: En $2(5a + 4) - 3(2a - 6)$ ¿qué operación hay que realizar antes de restar?

RP: Multiplicar.

* Aplicar la propiedad distributiva para realizar la multiplicación.
* Pedir que encuentren el resultado.

8. Resolver 14.

1. Expresar las cantidades con fórmulas. [D1]

M: ¿Cómo se calcula el área de un triángulo?

RP: Multiplicando la base y la altura y dividiendo ese producto entre 2.

M: ¿Cómo se puede expresar con variables la forma de encontrar el área de un triángulo?

RP: Nombrando con una variable la base y con otra la altura.

* Indicar que dibujen un triángulo cualquiera y que utilicen variables para nombrar la base y la altura.

M: Si a es la base del triangulo y h la altura ¿cómo se expresa el área del triángulo (A)?

RP: $A = a \times h \div 2$,

$$A = \frac{a \times h}{2},$$

$$A = \frac{ah}{2}.$$

2. Llamar fórmula a este tipo de resultado.

* Indicar que una fórmula es el resultado de tipo general expresado por medio de símbolos matemáticos.

3. Resolver 15.

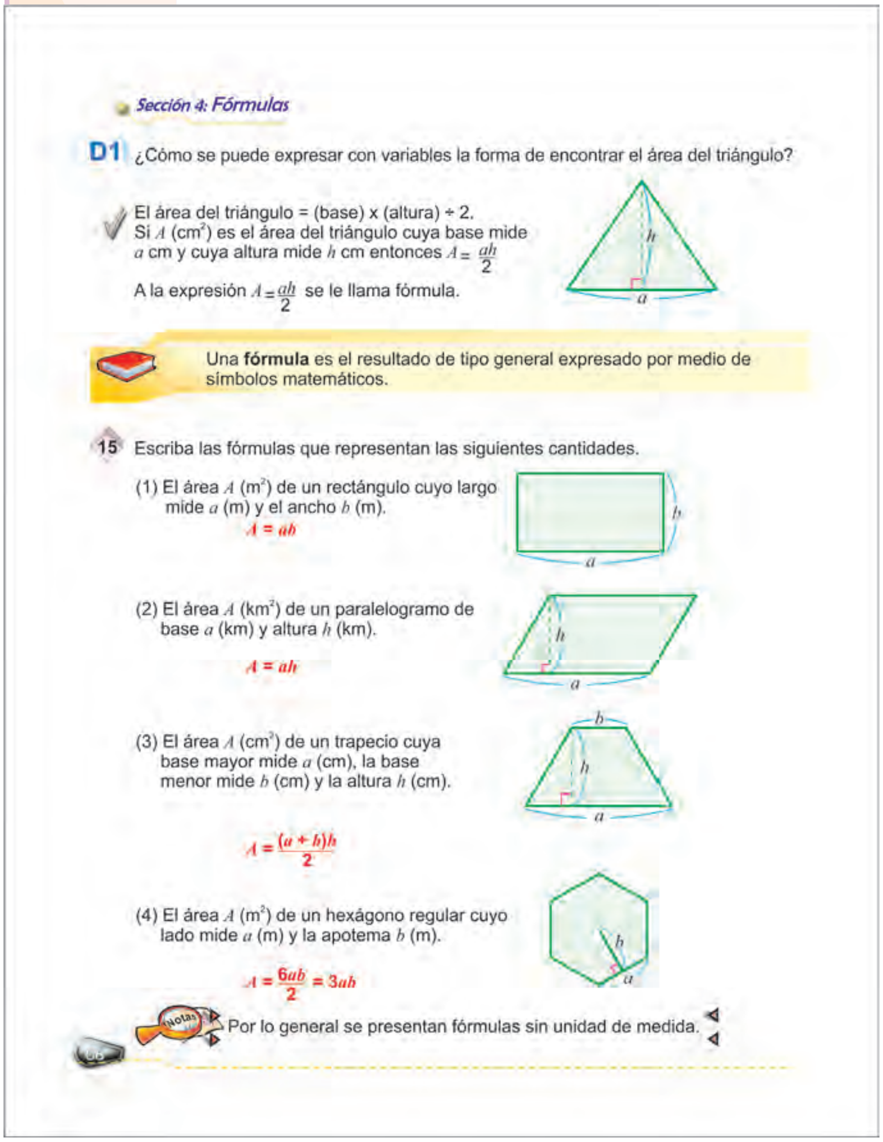
* Desarrollar algunos ejercicios en clase y dejar el resto para tarea.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (12~13/13) Operaciones con expresiones algebraicas

Objetivo: • Expresar las cantidades mediante fórmulas.

Materiales:


Sección 4: Fórmulas

D1 ¿Cómo se puede expresar con variables la forma de encontrar el área del triángulo?

El área del triángulo = (base) x (altura) ÷ 2.
Si A (cm²) es el área del triángulo cuya base mide a cm y cuya altura mide h cm entonces $A = \frac{ah}{2}$

A la expresión $A = \frac{ah}{2}$ se le llama fórmula.

Una **fórmula** es el resultado de tipo general expresado por medio de símbolos matemáticos.

15 Escriba las fórmulas que representan las siguientes cantidades.

(1) El área A (m^2) de un rectángulo cuyo largo mide a (m) y el ancho b (m).
$A = ab$

(2) El área A (km^2) de un paralelogramo de base a (km) y altura h (km).
$A = ah$

(3) El área A (cm^2) de un trapecio cuya base mayor mide a (cm), la base menor mide b (cm) y la altura h (cm).
$A = \frac{(a + b)h}{2}$

(4) El área A (m^2) de un hexágono regular cuyo lado mide a (m) y la apotema b (m).
$A = \frac{6ab}{2} = 3ab$

Notas: Por lo general se presentan fórmulas sin unidad de medida.

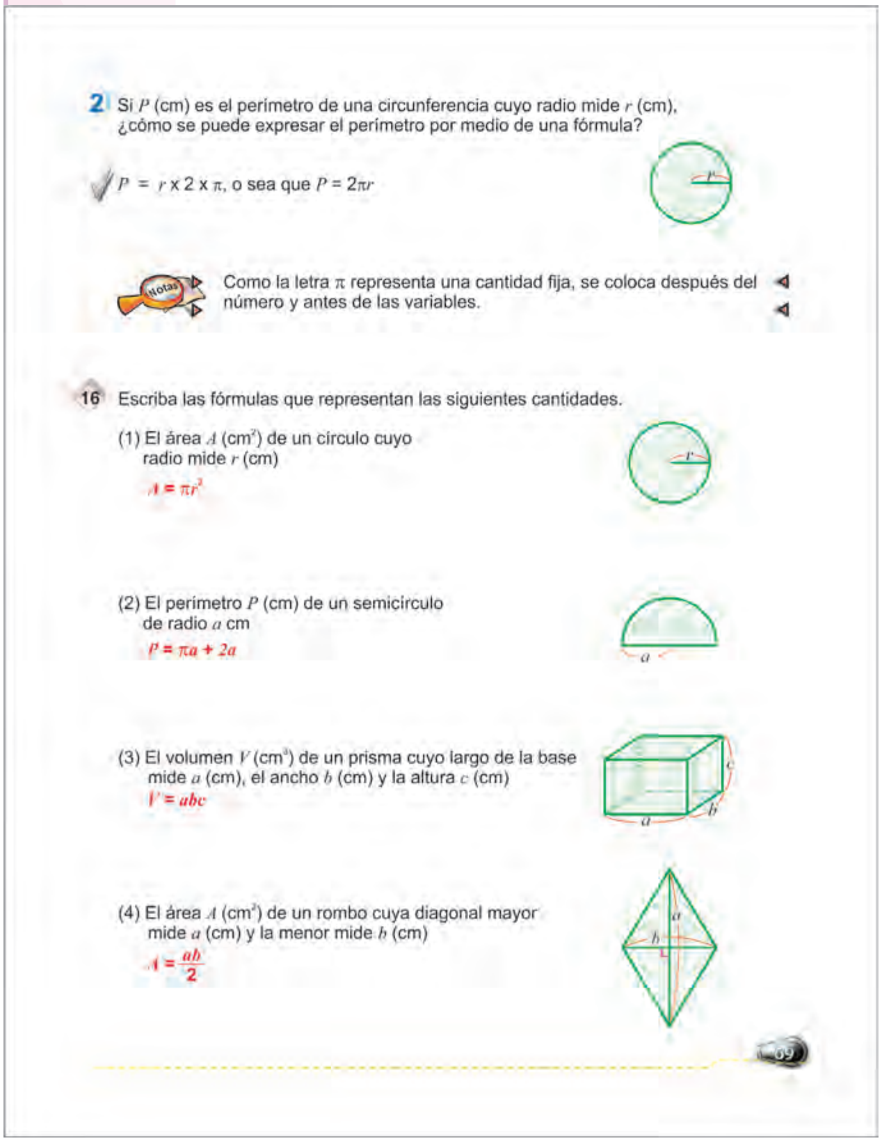
Lección 2: (12~13/13)

Operaciones con expresiones algebraicas

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:



2 Si P (cm) es el perímetro de una circunferencia cuyo radio mide r (cm), ¿cómo se puede expresar el perímetro por medio de una fórmula?

$P = r \times 2 \times \pi$, o sea que $P = 2\pi r$

Notas: Como la letra π representa una cantidad fija, se coloca después del número y antes de las variables.

16 Escriba las fórmulas que representan las siguientes cantidades.

(1) El área A (cm²) de un círculo cuyo radio mide r (cm)

$A = \pi r^2$

(2) El perímetro P (cm) de un semicírculo de radio a cm

$P = \pi a + 2a$

(3) El volumen V (cm³) de un prisma cuyo largo de la base mide a (cm), el ancho b (cm) y la altura c (cm)

$V = abc$

(4) El área A (cm²) de un rombo cuya diagonal mayor mide a (cm) y la menor mide b (cm)

$A = \frac{ab}{2}$

69

... viene de la página anterior.

4. Expresar las cantidades con fórmulas. [D2]

M: ¿Cómo se calcula el perímetro de una circunferencia?

RP: Multiplicando 2 por 3.14 por el radio, multiplicando π x 2 x radio, etc.

M: ¿Cómo se puede expresar con variables la forma de encontrar el perímetro de una circunferencia?

RP: Nombrando con una variable el radio.

* Indicar que dibujen una circunferencia y que utilicen variables para nombrar el radio.

M: Si r es el radio ¿cómo se expresa el perímetro de una circunferencia (P)?

RP: P = 2 x π x r, P = 2πr

* Indicar que π se escribe después del número 2 y antes de la variable r, por que π representa una cantidad fija: π = 3.1415...

5. Resolver 16 .

1. Resolver 1 ~ 8 .

Tipos de ejercicios:

1. Escritura de cantidades como expresiones algebraicas. (De un lenguaje común a un lenguaje algebraico).
2. Escritura de expresiones algebraicas como potencias.
3. Cálculo del valor numérico.
4. Identificación de términos y coeficientes.
5. Multiplicación (división) de expresiones algebraicas por (entre) un número.

Unidad 2: (1~2/2)

Variables y expresiones

Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre las variables y expresiones.

Materiales:

Ejercicios

1 Exprese lo siguiente con variables.

(1) Si x es un número, un número aumentado en seis es: $x + 6$

(2) Sea x un número, el número disminuido en veinte es: $x - 20$

(3) Si x es un número, la tercera parte del número es: $\frac{x}{3}$, $\frac{1}{3}x$

(4) El perímetro P de un pentágono regular cuyo lado mide b (cm). $5b$

(5) El vuelto que se obtiene al pagar con 100 Lempiras, 7 manzanas que cuestan a Lempiras cada una. $100 - 7a$

(6) El perímetro de un triángulo isósceles cuyos lados iguales mide a cm cada uno y el otro lado mide b (cm). $2a + b$

2 Escriba siguiendo la regla convencional de EA.

(1) $a \times 2 \times a$ $2a^2$ (2) $x \div 5$ $\frac{x}{5}$, $\frac{1}{5}x$ (3) $m \times 7 + 7 \times 5$ $7m + 35$ (4) $(4 \times x - 2) \div 6$ $\frac{2x-1}{3}$

3 Encuentre el valor numérico para los valores que se indican.

(1) $-3x$; $x = 4$ -12 (2) $5x + 2$; $x = -6$ -28

(3) $2x + 4$; $x = 0.5$ 5 (4) $-3x - 1$; $x = -\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{2}$

(5) $3a - b$; $a = 4$, $b = -2$ 14 (6) $-5a + 3b$; $a = -2$, $b = 5$ 25

(7) $-2x + 3y$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = 3$ 10 (8) $5a - \frac{1}{2}b$; $a = -\frac{2}{3}$, $b = 5$ $-\frac{35}{6}$

(9) $\frac{-b + 3c}{4}$; $b = 1$, $c = -3$ $-\frac{5}{2}$ (10) $\frac{a - 4b}{4}$; $a = 3$, $b = 0.5$ $\frac{1}{4}$

(11) b^2; $b = -4$ 16 (12) $-b^2$, $b = -4$ -16

4 Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas identifique los términos y los coeficientes de cada variable.

(1) $-3x + 2$ $-3x$, 2; -3 (2) $0.4a - 3.8b + 5$ $0.4a$, $-3.8b$, 5; 0.4, -3.8 (3) $-\frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}$ $-\frac{3}{2}x$, $-\frac{2}{5}y$, $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{5}$ (4) $-3x + 2y - 5z$ $-3x$, $2y$, $-5z$; -3, 2, -5

5 Calcule.

(1) $(-5m) \times (-2)$ $10m$ (2) $3g \times \left(-\frac{1}{3}\right)$ $-g$ (3) $-3n \times 0.4$ $-1.2n$

(4) $(-14a) \times \left(-\frac{2}{7}\right)$ $4a$ (5) $6b \div 8$ $\frac{3}{4}b$ (6) $-48a \div (-18)$ $\frac{8}{3}a$

(7) $7y \div \frac{5}{2}$ $\frac{14}{5}y$ (8) $-8m \div \left(-\frac{4}{7}\right)$ $14m$

70

Variables y expresiones

Ejercicios de la unidad

[Continuación]

6 Multiplicación (división) de una expresión algebraica de dos términos por (entre) un número.

7 Adición y sustracción de expresiones algebraicas.

8 Expresión de cantidades con fórmulas.

---

6 Calcule.

(1) $3(-5a-3)$ $-15a-9$

(2) $-5(a-b)$ $-5a+5b$

(3) $-1.2\,(0.4y-6)$ $-0.48y+7.2$

(4) $-\frac{2}{3}\left(-4y+\frac{3}{4}\right)$ $\frac{8}{3}y-\frac{1}{2}$

(5) $\frac{7a+6}{2}\times 4$ $14a+12$

(6) $\frac{-2m-5n}{3}\times 4$ $\frac{-8m-20n}{3}$

(7) $(-9r-12)\div 3$ $-3r-4$

(8) $(4m-12)\div 6$ $\frac{2}{3}m-2$

(9) $(-2q+15)\div\frac{3}{2}$ $-\frac{4}{3}q+10$

(10) $(-6p-9)\div\frac{3}{5}$ $-10p-15$

7 Calcule.

(1) $-3y+4y-5y+7y$ $3y$

(2) $-\frac{7}{5}a-\frac{2}{5}a+\frac{6}{5}a$ $-\frac{3}{5}a$

(3) $-0.8m-3n+6m-0.3n$ $5.2m-3.3n$

(4) $-\frac{3}{5}a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}a$ $-\frac{17}{20}a+\frac{1}{3}b$

(5) $(3x-5)+(-6x-8)$ $-3x-13$

(6) $(-2.3a-7)+(-5.6a+8)$ $-7.9a+1$

(7) $\left(-\frac{2}{7}y-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{5}{7}y-2\right)$ $-y-\frac{11}{5}$

(8) $(-4a-5)-(3a-2)$ $-7a-3$

(9) $\left(\frac{4}{3}m-\frac{1}{7}\right)-\left(-\frac{1}{2}m-\frac{2}{3}\right)$ $\frac{11}{6}m+\frac{11}{21}$

(10) $\frac{3}{2}\left(4y-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}\right)$ $\frac{13}{2}y-2$

(11) $3(-6y-7)-5(3y-2)$ $-33y-11$

(12) $(-2.3h+0.3)-(-1.3h+6.03)$ $-h-5.73$

(13) $2.5(-1.4t-3)-4(0.2t+2)$ $-4.3t-15.5$

(14) $-4(-2d+5)-3(4d-8)$ $-4d+4$

8 Escriba la fórmula de lo que se le presenta a continuación.

(1) El perímetro P (cm) de un triángulo equilátero cuyo lado mide b (cm).
$P=3b$

(2) El área A (cm^2) de un cuadrado de lado a (cm).
$A=a^2$

(3) El área A (cm^2) de un semicírculo de radio b (cm).
$A=\frac{\pi b^2}{2}$

(4) El volumen V (cm^3) de un cilindro cuyo radio de la base es a (cm) y la altura es h (cm).
$V=\pi a^2 h$

(5) El volumen V (cm^3) de un prisma de base cuadrada cuyo lado mide a (cm) y la altura b (cm).
$V=a^2 h$

1. **Resolver** 1 .

Unidad 2: **Variables y expresiones**

Evaluación de la unidad

Evaluación

Encierre con un círculo la letra del inciso que hace correcta la proposición dada.

(1) ¿Cuál de las siguientes expresiones con variables se puede utilizar para representar "la cuarta parte de un número ha aumentado en seis"?

1) $4a + 6$ 2) $4 + 6$ 3) $\frac{a}{4} - 6$ (4) $\frac{a}{4} + 6$

(2) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el perímetro de un trapecio isósceles cuyos lados iguales miden b (cm) y cuyas bases miden a (cm) y c (cm)?

1) $a + b + c$ (2) $a + 2b + c$ 3) $a + 2 + b + c$ 4) $a \times b \times c$

(3) El valor numérico cuando $a = -1$ y $b = 2$ en $-a - 3b$ es:

(1) -5 2) 5 3) -6 4) 6

(4) Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{2}{3}$, ¿cuál es el valor numérico de $-3a - 2b$?

1) $-\frac{17}{6}$ 2) $\frac{17}{6}$ (3) $-\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{6}$

(5) En la expresión algebraica $-3x - 2y + 6$, los términos son:

1) $-3x$; $-2y$ (2) $-3x$; $-2y$; 6 3) $3x$; $2y$ 4) $3x$; $2y$; 6

(6) El resultado de $-6a \times (-8)$ es:

1) -48 2) 48 3) $-48a$ (4) $48a$

(7) La expresión $-5y \div 10$ es igual a:

1) $-2y$ 2) $2y$ 3) $\frac{y}{2}$ (4) $-\frac{y}{2}$

(8) El resultado de $-(-3m - 6)$ es:

(1) $3m + 6$ 2) $-3m - 6$ 3) $-3m + 6$ 4) $3m - 6$

(9) Al efectuar $-4(-3a + 5)$ queda:

1) $-12a + 20$ (2) $12a - 20$ 3) $-7a - 1$ 4) $-7a + 1$

(10) Al efectuar $\left(\frac{2}{3}m - 6\right) - \left(\frac{5}{3}m + 2\right)$ se obtiene.

1) $\frac{7}{3}m - 4$ 2) $-m - 4$ 3) $m - 8$ (4) $-m - 8$

Variables y expresiones

Evaluación de la unidad

1. Resolver 2 ~ 3.

2 Calcule.

(1) $-0.2(3y - 4x)$

$-0.6y + 0.8x$

(2) $\frac{4a - 3}{5} \times 2$

$\frac{8a - 6}{5}$

(3) $(-20b - 14) \div 4$

$-5b - \frac{7}{2}$

(4) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{7}{4}y - \frac{3}{5}x$

$-\frac{1}{10}x - y$

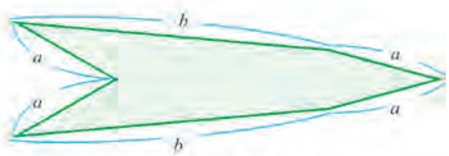
(5) $(3.5m - 8) + (-2.4m - 14.7)$

$1.1m - 22.7$

(6) $\left(-\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}\right)$

$\frac{3}{5}x - \frac{7}{6}$

3 Escriba la fórmula del perímetro P de la siguiente figura.



$P = 4a + 2b$

73

Unidad 3

Ecuaciones de primer grado en una variable (22 horas)

1 Expectativas de logro

- Reconocen la aplicabilidad de ecuaciones de primer grado en situaciones de la vida real.
- Resuelven problemas mediante ecuaciones de primer grado.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones
- Expresiones algebraicas
- Reglas convencionales de las expresiones algebraicas
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EA
- Términos y coeficientes en EA
- Producto y división de EA por un número
- Adición y sustracción de EA
- Fórmulas

Ecuaciones de primer grado en una variable
- Igualdades numéricas
- Ecuaciones de primer grado
- Propiedades de la igualdad
- Aplicación de las propiedades de la igualdad en ecuaciones de primer grado
- Solución de ecuaciones de primer grado
- Proceso de resolución de problemas con ecuaciones de primer grado
- Miscelánea de problemas

Octavo grado

Polinomios
- Clasificación y operaciones básicas de polinomios
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Expresiones algebraicas racionales (EAR)
- Expresiones algebraicas racionales
- Multiplicación y división de EAR
- Adición y sustracción de EAR
- Mínimo común denominador de dos EAR
- Despeje de variables en fórmulas

Ecuaciones cuadráticas en una variable
- Ecuaciones cuadráticas
- Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante:
  - Factorización
  - Uso de la raíz cuadrada
  - Completación al cuadrado (fórmula cuadrática)
- Aplicación de las ecuaciones cuadráticas.

Noveno grado

Inecuaciones de primer grado en una variable
- Símbolos de desigualdad
- Propiedades de la desigualdad
- Inecuaciones de primer grado

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Sistema de ecuaciones
- Métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Tipos de sistemas de ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación del sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Ecuaciones de primer grado en dos variables
- Función de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas cartesianas
- Gráfica de una función de primer grado
- Gráfica de una función de primer grado utilizando la ordenada al origen y otros puntos
- Ecuación de la recta
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Gráfica de ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación de las funciónes de primer grado con datos experimentales, figuras geométricas, relación entre dos expresiones y utilización de las gráficas

3 Plan de estudio (22)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Ecuaciones de primer grado en una vareable (11 horas)	1~2/11	• Igualdades numéricas
		• Ecuaciones de primer grado
	3/11	• Propiedades de la igualdad
	4~5/11	• Aplicación de las propiedades de la igualdad en la solución de ecuaciones de primer grado
	6~8/11	• Solución de ecuaciones de primer grado por transposición de términos
	9~11/11	• Solución de ecuaciones de primer grado
2. Aplicación de las ecuaciones de primer grado (9 horas)	1~2/9	• Proceso de resolución de problemas con ecuaciones de primer grado
	3~9/9	• Miscelánea de problemas
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	
Evaluación	No hay horas	

4 Puntos de lección

- **Lección 1: Ecuaciones de primer grado**
  Hay autores que llaman *identidad* a la igualdad entre *expresiones algebraicas* que se satisface para cualquier valor asignado a sus variables (Ejemplo: $2x + 3x = 5x$) y llaman ecuación si la igualdad se satisface sólo para algunos valores (Ejemplo: $2x + 3 = 5$). En este último sentido se plantean las ecuaciones en el DCNEB por lo que en el LE se entenderá de esta forma.

  En séptimo grado se enseñan las ecuaciones que se pueden transformar a la forma $ax = b$ ($a \neq 0$) por medio de la transposición. A éstas se les llama "ecuaciones de primer grado". Las soluciones de una ecuación son los valores que al sustituirlos por las variables satisfacen la igualdad.

  En [C] al sustituir la variable por varios números se encuentra la solución 5, pero de esta manera no se puede confirmar que es la única solución y además es un proceso tedioso porque no se sabe cuantos ni por cuales valores hay que probar.

  Para encontrar todas las soluciones (en el caso de las ecuaciones de primer grado sólo hay una) hay que cambiar la ecuación por medio de una cadena de transformaciones elementales que son:

1 Sumar el mismo número a ambos lados de la ecuación

2 Multiplicar ambos lados por un mismo número diferente de cero (En el LE para facilitar el entendimiento de los estudiantes se distinguen sumar de restar y multiplicar de dividir).

Ejemplo:

$$2x + 5 = 25$$
$$\downarrow$$
$$2x + 5 - 5 = 25 - 5 \text{ .... sumar } -5$$
$$\downarrow$$
$$2x = 20$$
$$\downarrow$$
$$2x \times \frac{1}{2} = 20 \times \frac{1}{2} \text{ ..... multiplicar por } \frac{1}{2}$$
$$\downarrow$$
$$x = 10$$

Lo importante es que las transformaciones son reversibles, es decir, hay otras transformaciones en la dirección opuesta.

Ejemplo:

$2x + 5 = 25$

↑

$2x + 5 = 20 + 5$ .... Sumar 5

↑

$2x = 20$

↑

$x \times 2 = 10 \times 2$ .... Multiplicar por 2

↑

$x = 10$

De este hecho se sabe que el conjunto de las soluciones de la ecuación no cambia (La solución es 10 en este ejemplo).

Como la adición se puede representar por la sustracción y la multiplicación (por un número diferente de cero) por la división y viceversa las propiedades de la igualdad que se aplican para resolver **E** (2) son las siguientes:

1 Sumar 5 a ambos lados

2 Restar 5 de ambos lados (o sumar -5)

3 Multiplicar ambos lados por 2

4 Dividir ambos lados entre 2 (o multiplicar por $\frac{1}{2}$)

Por lo general "resolver una ecuación de primer grado" significa encontrar la forma más sencilla "$x = a$".

Se llama *transposición* al cambio de un término de un lado al otro acompañado por el cambio del signo.

Por lo general se transponen los términos que contienen x (incógnita) al lado izquierdo y los demás al lado derecho, de modo que después de reducir los términos semejantes se obtenga la forma "$ax = b$" luego se divide entre el coeficiente de x.

Ejemplo:

$5x - 4 = 3x + 6$

$5x - 3x = 6 + 4$ ... Transponer términos

$2x = 10$ .... Reducir términos semejantes

$x = 5$ .... Dividir entre el coeficiente de x.

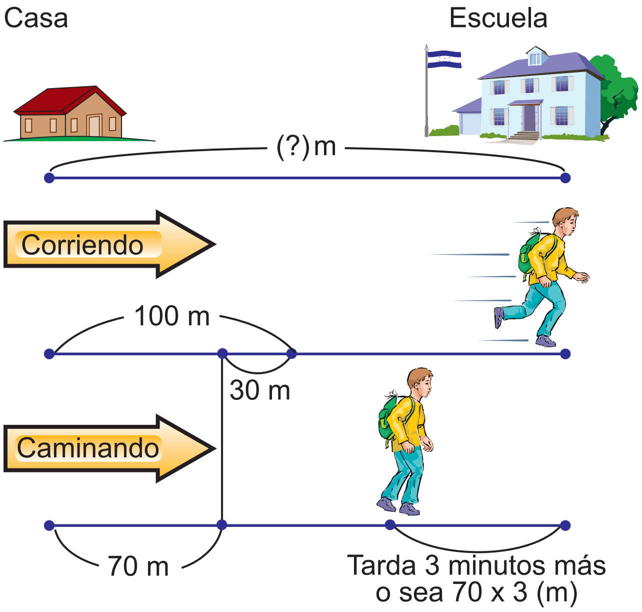
En la sección 6 se estudia la forma de resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis [**N**], números decimales [**Ñ**] y números racionales [**O**]. Cuando hay paréntesis por lo general se eliminan, cuando hay números decimales se multiplican por una potencia de 10 y cuando hay números racionales se multiplican por un múltiplo común de los denominadores (por lo general se usa el mcm). Para estas dos últimas situaciones se hace este procedimiento si se quiere evitar los cálculos con este tipo de números, sin embargo es importante estar consciente que al multiplicar por estos números se está aplicando la propiedad 3 de la igualdad.

- **Lección 2: Aplicación de las ecuaciones de primer grado**

Todos los problemas de esta lección se pueden resolver sin necesidad de usar ecuaciones. Por ejemplo en el problema [**E**] si Juan corre, avanza 100 - 70 = 30 (m) por minuto más rápido que caminando. En 3 minutos él recorre 70 x 3 = 210 (m) que es 210 ÷ 30 = 7 veces la diferencia de la distancia recorrida en un minuto entre corriendo y caminando. Por lo tanto, él corre 7 minutos para llegar a la escuela. La distancia entre la casa y la escuela es 100 x 7 = 700 (m).

Sin embargo, una vez que se representa con x la distancia entre la casa y la escuela (que es el valor que se pide encontrar) y que se reescriba la relación de las cantidades con x, se puede encontrar el valor de x mecánicamente y en forma más fácil sin necesidad de inventar una manera especial de resolverla.

En esto consiste la ventaja del uso de la incógnita.



El proceso de resolver problemas usando ecuaciones es el siguiente:

1. Determinar los datos dados y los datos buscados (incógnitas).

2. Decidir qué cantidad se representa con x y expresar las otras cantidades en términos de x (establecer la relación entre las cantidades).

3. Expresar en la forma de una ecuación las cantidades iguales.

4. Resolver la ecuación.

5. Averiguar si la solución de la ecuación puede ser la respuesta del problema.

En 2 puede haber varias maneras de representar la cantidad con x. Por ejemplo en [E], si se representa la distancia entre la casa y la escuela con x la ecuación es: $\frac{x}{70} - 3 = \frac{x}{100}$.
Si x representa el tiempo que tardó para llegar a la escuela corriendo la ecuación es:

$$100x = 70(x + 3)$$

En cuanto a 5 hay que tener mucho cuidado porque hay ecuaciones cuya solución no es la respuesta que se busca. Por ejemplo, en 3 (1) Luis no alcanza a Gloria antes que ella llegue a la escuela, aunque la ecuación tiene solución.

Otro caso se presenta en 5 (1) de los ejercicios de la unidad en donde la ecuación tiene la solución que no es un número natural, mientras que la respuesta al problema requiere ser un número natural. Esto es:

$$6x + 10 = 30$$
$$6x = 20$$
$$x = \frac{10}{3}$$

La solución de la ecuación es $\frac{10}{3}$, sin embargo no es la solución del problema ya que los lápices se venden enteros y no por partes, es decir, no se compra $\frac{10}{3}$ lápiz.

5 Desarrollo de clases

1. Comentar lo observado en el dibujo. [A]

M: ¿Qué observa en el dibujo?

RP: Una balanza con varios pesos. Dos platos, en uno hay 8 Kg y 5 Kg, y en el otro hay 5 Kg, 5 Kg y 3 Kg. La balanza está en equilibrio.

* Aprovechar las respuestas (balanza en equilibrio) para inducir a los estudiantes al tema.

2. Expresar la relación de los pesos utilizando el signo igual. [A1]

M: ¿Cuál es el peso del plato de la izquierda (derecha)?

RP: 13 Kg. 8 Kg + 5 Kg.
(13 Kg. 5 Kg + 5 Kg + 3 Kg).

M: ¿Cómo son los pesos de ambos platos?

RP: Iguales.

M: Exprese la relación del peso de ambos platos con el signo igual.

RP: 8 + 5 = 5 + 5 + 3

* Llamar a la expresión anterior igualdad numérica.

* Pedir a los estudiantes que den ejemplos de igualdades numéricas.

3. Identificar los miembros de una igualdad numérica.

M: ¿Con cuál signo se representa una igualdad numérica?

RP: Con el igual (=).

M: En la igualdad numérica 8 + 5 = 5 + 5 + 3 ¿Cuáles serán sus miembros?

* Concluir que cada una de las expresiones a los lados del igual se les llama miembros de la igualdad numérica.

4. Resolver 1.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (1/11) Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo:
- Identificar y ejemplificar igualdades numéricas.
- Identificar y ejemplificar ecuaciones.

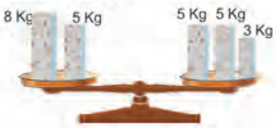
Materiales: (M) LE balanza y pesos (N) LE

Unidad 3 Ecuaciones de primer grado en una variable

Lección 1: Ecuaciones de primer grado

Sección 1: Igualdades numéricas

A Observe la siguiente balanza.



1 Exprese la relación de los pesos de ambos lados de la balanza utilizando el signo =.

✓ 8 + 5 = 5 + 5 + 3

A la expresión anterior se le llama igualdad numérica.

Una **igualdad numérica** es la relación de igualdad que se establece entre dos expresiones numéricas. La relación de igualdad se representa con el signo igual (=).

Son igualdades numéricas:

(1) 10 + 5 = 15 (2) -8 + 1 = -5 - 2 (3) $-\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}$ (4) 0.7 - 2 = -1.3

En una **igualdad numérica** cada una de las expresiones a los lados del igual es un miembro. Toda igualdad numérica tiene dos miembros.

$$\underbrace{8 + 5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{5 + 5 + 3}_{\text{Segundo miembro}}$$

1 Determine cuáles de las siguientes igualdades numéricas son verdaderas y cuáles son falsas.

(1) 20 - 18 = 2 **(V)** (2) 7 - 9 = -2 **(V)** (3) 0.4 x 3 = 0.12 **(F)**

(4) $-\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} - 1$ **(F)** (5) -3 x 6 = -2 x 9 **(V)** (6) $(-\frac{3}{2})^2 = -\frac{4}{9}$ **(F)**

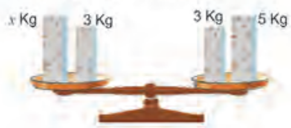
Lección 1: (1/11)

Ecuaciones de primer grado en una variable

[Continuación]

Sección 2: Ecuaciones de primer grado

B Observe la siguiente balanza.



1 Exprese los pesos de ambos lados como una igualdad.

✓ $x + 3 = 3 + 5$

A la expresión anterior se le llama ecuación. En una ecuación el valor de la variable x es desconocido.

Una **ecuación** es una igualdad con una o más variables cuyo valor o valores deben encontrarse.

En una ecuación puede haber más de una variable, sin embargo en este grado sólo se estudiarán las ecuaciones con una variable.

Son ecuaciones:

(1) $x + 4 = 8$ (2) $2x - 3 = 7$ (3) $3 + 5x = 2x + 15$ (4) $5x = 30$

2 Determine cuáles de las siguientes expresiones son igualdades numéricas y cuáles son ecuaciones.

(1) $3x - 2 = 11$
Ecuación

(2) $7 + 8 = 5 \times 3$
Igualdad numérica

(3) $-\frac{7}{2} + \frac{8}{3} = \frac{-1}{2} \times \frac{5}{3}$
Igualdad numérica

(4) $8 = 4x$
Ecuación

(5) $5 - x = x + 1$
Ecuación

(6) $2^{-3} = \frac{1}{8}$
Igualdad numérica

75

... viene de la página anterior.

5. **Comentar lo observado en el dibujo. [B]**
   * Desarrollarlo en forma similar a [A].

6. **Expresar los pesos como una igualdad. [B1]**

M: ¿Cuál es el peso del plato de la Izquierda (derecha)?

RP: x Kg + 3 Kg.
(8 Kg. 3 Kg + 5 Kg).

M: ¿Cómo son los pesos de ambos platos?

RP: Iguales.

M: Exprese el peso de ambos platos como una igualdad.

RP: $x + 3 = 3 + 5$

M: ¿Cuál es la diferencia entre esta igualdad y la anterior?

RP: Que ésta lleva una variable y la otra sólo números.

M: ¿Conocemos el valor de la variable x?

RP: No.

* Llamar a la expresión anterior ecuación.
* Indicar que en una ecuación el valor de la variable es desconocido y debe encontrarse.
* Pedir a los estudiantes que den ejemplos de ecuaciones.

7. **Resolver 2 .**

Lección 1: (2/11)

Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo: • Expresar una situación problemática con una ecuación.

Materiales:

C La familia Guzmán tiene 7 miembros y están haciendo 100 tortillas para la fiesta, ya están hechas 65. Si cada uno de los miembros de la familia hace la misma cantidad de tortillas, ¿cuántas tiene que hacer cada uno?

1 Representando la cantidad de tortillas que tiene que hacer cada miembro con la variable x, exprese la cantidad total de tortillas que hace la familia.

✓ $(7x + 65)$ tortillas.

Como la cantidad total de tortillas debe ser 100 $7x + 65 = 100$

Ahora investiguemos la ecuación anterior sustituyendo la variable x por varios números.

2 Llene la siguiente tabla de los valores del primer miembro de la ecuación anterior.

Valor de x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor de $7x + 65$										

✓

Valor de x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor de $7x + 65$	72	79	86	93	100	107	114	121	128	135

Cuando el valor de x es 5 la ecuación es cierta en este caso. Los otros valores de x en la tabla hacen que la ecuación sea falsa. De esto se deduce que cada uno de los miembros de la familia Guzmán tiene que hacer 5 tortillas.

Las **soluciones** de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación es encontrar la solución de la ecuación.

3 De los valores 0, 1, 2 y 3 ¿cuáles son soluciones de las siguientes ecuaciones?

(1) $5 - 2x = 1$ $x = 2$

(2) $2x + 3 = 12 - x$ $x = 3$

1. Comentar el problema. [C]

* Hacer preguntas para la comprensión del problema.

2. Expresar la cantidad de tortilla con una ecuación. [C1]

M: Si x representa la cantidad de miembros de la familia ¿Cómo se expresa la cantidad de tortillas que se necesita?

* Esta pregunta puede ser difícil para los estudiantes, divídala haciendo preguntas como las siguientes.

M: ¿Cómo se expresa la cantidad de tortillas que van a hacer 7 miembros ahora?

RP: $7x$.

M: ¿Cómo se expresa la cantidad total de tortillas que hace la familia?

RP: $7x + 65$.

M: ¿Cómo se expresa la cantidad de tortillas como una igualdad?

RP: $7x + 65 = 100$.

3. Llenar la tabla de los valores de ambos miembros de la igualdad. [C2]

* Escribir la tabla en la pizarra y pedir a los estudiantes que la llenen encontrando los valores para x.

M: ¿Cuándo los valores para ambos miembros de la ecuación son iguales?

RP: Cuando $x = 5$.

M: ¿Cuántas tortillas más tiene que hacer cada uno?

RP: 5 tortillas.

M: ¿Cuánto es la cantidad total de tortillas que se hace?

RP: 100 tortillas.

* Concluir que $x = 5$ es una solución de la ecuación y que los demás valores la hacen falsa.

* Concluir sobre la solución y la resolución de una ecuación.

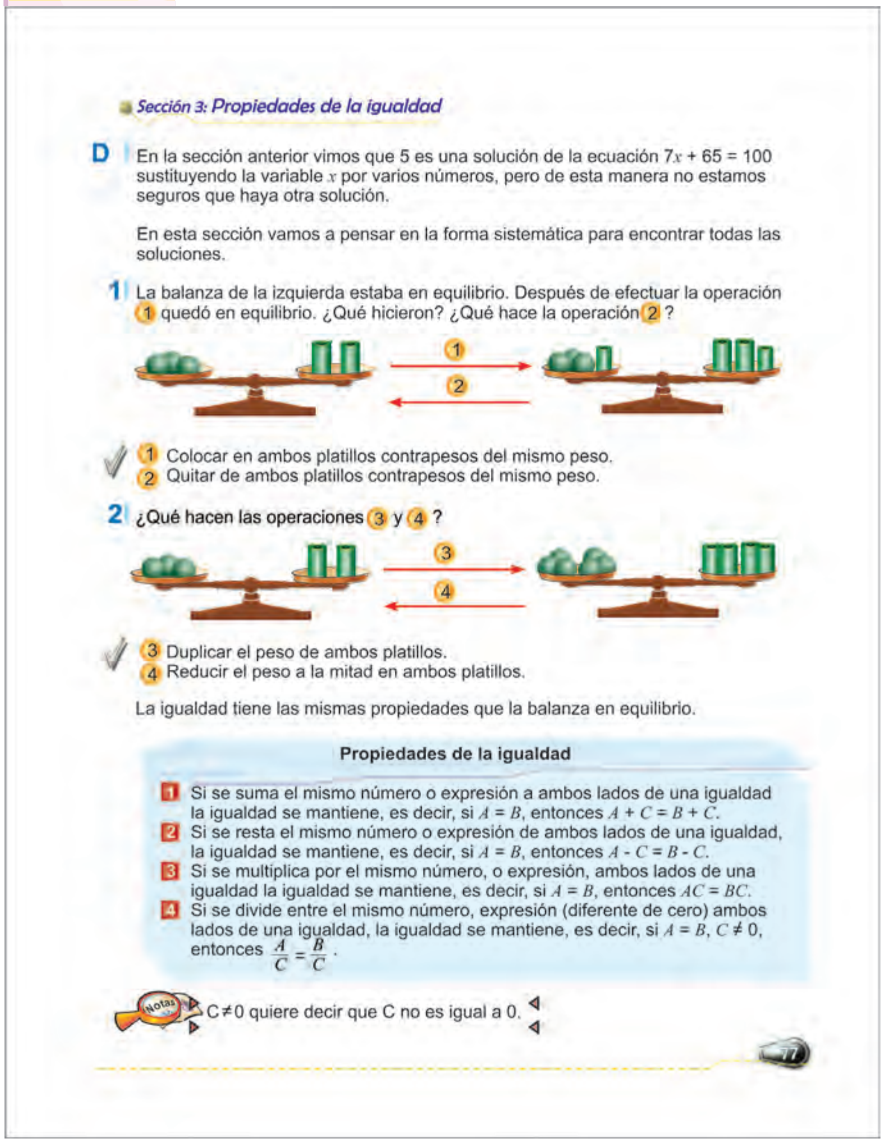
4. Resolver 3 .

Lección 1: (3/11)

Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo: • Conocer las propiedades de la igualdad.

Materiales:



Sección 3: Propiedades de la igualdad

D En la sección anterior vimos que 5 es una solución de la ecuación $7x + 65 = 100$ sustituyendo la variable x por varios números, pero de esta manera no estamos seguros que haya otra solución.

En esta sección vamos a pensar en la forma sistemática para encontrar todas las soluciones.

1 La balanza de la izquierda estaba en equilibrio. Después de efectuar la operación (1) quedó en equilibrio. ¿Qué hicieron? ¿Qué hace la operación (2) ?

(1) Colocar en ambos platillos contrapesos del mismo peso.
(2) Quitar de ambos platillos contrapesos del mismo peso.

2 ¿Qué hacen las operaciones (3) y (4) ?

(3) Duplicar el peso de ambos platillos.
(4) Reducir el peso a la mitad en ambos platillos.

La igualdad tiene las mismas propiedades que la balanza en equilibrio.

Propiedades de la igualdad

1. Si se suma el mismo número o expresión a ambos lados de una igualdad la igualdad se mantiene, es decir, si $A = B$, entonces $A + C = B + C$.
2. Si se resta el mismo número o expresión de ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene, es decir, si $A = B$, entonces $A - C = B - C$.
3. Si se multiplica por el mismo número, o expresión, ambos lados de una igualdad la igualdad se mantiene, es decir, si $A = B$, entonces $AC = BC$.
4. Si se divide entre el mismo número, expresión (diferente de cero) ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene, es decir, si $A = B$, $C \neq 0$, entonces $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$.

Notas: $C \neq 0$ quiere decir que C no es igual a 0.

77

1. Discutir sobre la forma de encontrar la solución de una ecuación. [D]

M: ¿Cómo encontramos la solución de la ecuación planteada en la clase anterior?

RP: Sustituyendo los valores de x por varios números.

* Hacer énfasis que de esta forma no se está seguro si hay otras soluciones y cuesta mucho.

2. Conocer las propiedades de la igualdad. [D1 y D2]

* Hacer los dibujos referentes a la propiedad 1 de la igualdad. (Operación (1)).

M: ¿Qué observa en el dibujo?

RP: Dos balanzas, cada una con diferente peso. Los pesos en ambos platillos de cada balanza son iguales.

M: Según los dibujos. ¿Qué se hizo?

RP: Agregar en ambos platillos un mismo peso.

M: ¿Cuál es el resultado de la operación?

RP: Mantiene el equilibrio.

M: ¿Con cuál de las operaciones matemáticas se puede relacionar esta situación? ¿Por qué?

RP: Con la suma. Porque se han agregado contrapesos del mismo peso.

* Concluir que si se suma el mismo número o expresión a ambos lados de la igualdad ésta se mantiene.

3. Desarrollar las demás propiedades en forma similar a la anterior.

* La propiedad 2 está relacionada con la resta, la propiedad 3 con la multiplicación y la propiedad 4 con la división.

1. Encontrar la solución de una ecuación por adición. [E]

M: ¿Qué hacemos para encontrar el valor de x?

RP: Sumar 5.

M: Escriba el proceso de la transformación en la ecuación.

RP: $x - 5 + 5 = 1 + 5$. $x = 6$

M: ¿Cuál es la solución de la ecuación?

RP: $x = 6$.

M: Comprueben el resultado.

* Concluir que por lo general la solución tiene la forma x = (número).

* Indicar que no se escribe la comprobación con la respuesta.

2. Resolver 4 .

3. Encontrar la solución de una ecuación por división. [F]

M: En la ecuación $2x = 6$ ¿Qué hacemos para encontrar el valor de x?

RP: Transformar la ecuación dividiendo entre 2 cada lado.

M: ¿Cuál es el resultado de dividir entre 2 ambos lados?

RP: $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ $\quad x = 3$

M: ¿Para qué se dividirá entre 2 ambos lados?

RP: Para encontrar el valor de x. Para que la x quede sola.

* Realizar este mismo ejercicio aplicando la propiedad de la multiplicación como aparece en el LE.

4. Resolver 5 .

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (4~5/11) Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo:

- Aplicar las propiedades de la igualdad para encontrar la solución de ecuaciones de primer grado.

Materiales:

Sección 4: Aplicación de las propiedades de la igualdad para la solución de ecuaciones de primer grado

E Resuelva $x - 5 = 1$ aplicando las propiedades de la igualdad.

$x - 5 = 1$

$x - 5 + 5 = 1 + 5$ — [1] sumar 5 en ambos lados (para que el lado izquierdo solo queda x).

$x = 6$ $\qquad$ R: $x = 6$

Comprobación : si se sustituye x por 6
el primer miembro 6 - 5 =1........ resulta 1
el segundo miembro es 1

Es decir, ambos miembros son iguales. Por tanto $x = 6$ es la solución de $x - 5 = 1$

Notas: Por lo general se presenta la solución en la forma "x = (un número)". La comprobación es importante para investigar errores en el cálculo pero no es necesario escribir en la respuesta".

4 Resuelva aplicando las propiedades [1] ó [2] de la igualdad.

(1) $x - 4 = 3$ $\quad x = 7$ $\qquad$ (2) $x - 7 = -2$ $\quad x = 5$ $\qquad$ (3) $x - 3 = -8$ $\quad x = -5$

(4) $x - 1 = 7$ $\quad x = 8$ $\qquad$ (5) $x + 7 = -1$ $\quad x = -8$ $\qquad$ (6) $9 + x = -10$ $\quad x = -19$

F Resuelva $2x = 6$ aplicando las propiedades de la igualdad.

$2x = 6$

$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ — [4] Dividir ambos lados entre 2 (para que en el lado izquierdo solo quede x).

$x = 3$ $\qquad$ R: $x = 3$

Otra forma de resolverla es aplicando la propiedad [3] de la igualdad.

$2x = 6$

$2x \times (\frac{1}{2}) = 6 \times (\frac{1}{2})$ — [3] Multiplicar ambos lados por $\frac{1}{2}$ (para que en el lado izquierdo solo quede x).

$x = 3$ $\qquad$ R: $x = 3$

5 Resuelva aplicando las propiedades de la igualdad.

(1) $5x = 40$ $\quad x = 8$ $\qquad$ (2) $7x = -21$ $\quad x = -3$ $\qquad$ (3) $-3x = -15$ $\quad x = 5$

(4) $-8x = -24$ $\quad x = 3$ $\qquad$ (5) $-6x = 60$ $\quad x = -10$ $\qquad$ (6) $-x = 7$ $\quad x = -7$

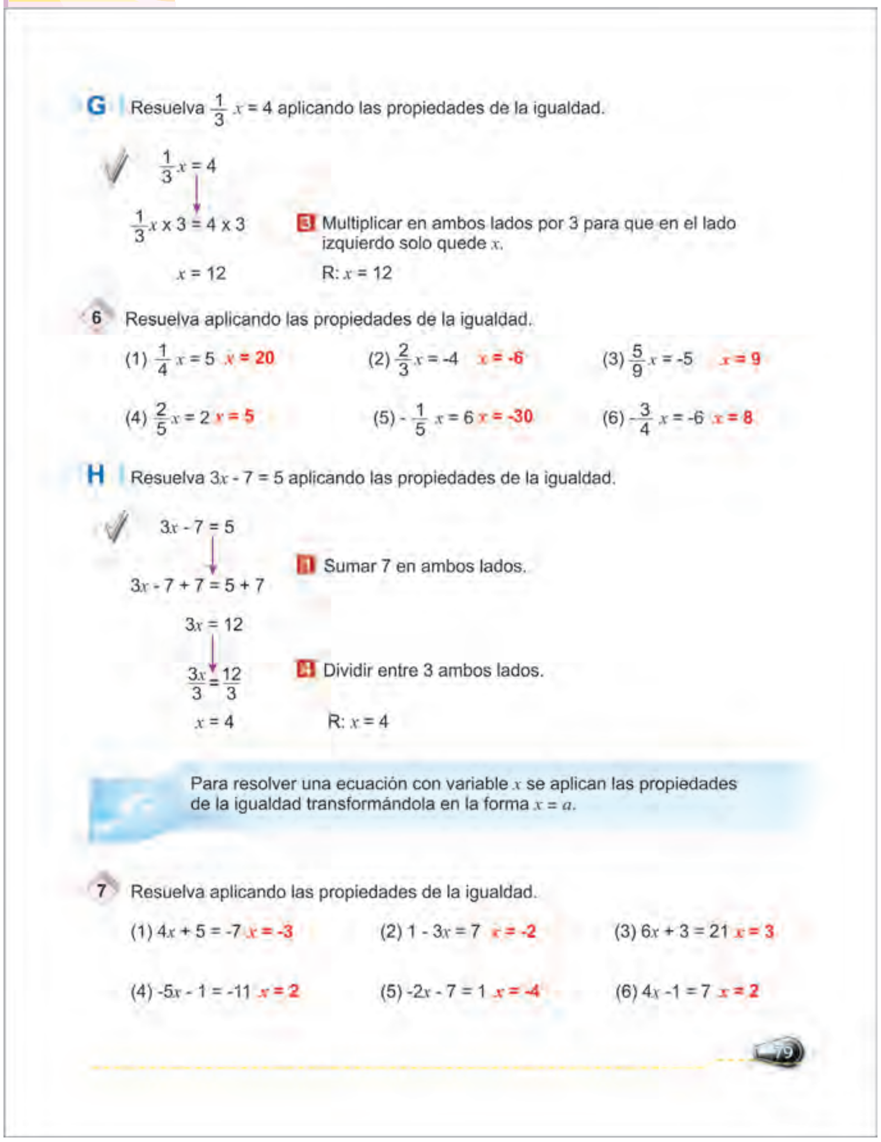
Notas: Teóricamente la comprobación es innecesaria, porque el proceso es reversible. Veánse puntos de lección.

Lección 1: (4~5/11) Ecuaciones de primer grado en una variable

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:



G Resuelva $\frac{1}{3}x = 4$ aplicando las propiedades de la igualdad.

$\frac{1}{3}x = 4$

$\frac{1}{3}x \times 3 = 4 \times 3$ — Multiplicar en ambos lados por 3 para que en el lado izquierdo solo quede x.

$x = 12$ — R: $x = 12$

6 Resuelva aplicando las propiedades de la igualdad.

(1) $\frac{1}{4}x = 5$ $x = 20$ (2) $\frac{2}{3}x = -4$ $x = -6$ (3) $\frac{5}{9}x = -5$ $x = 9$

(4) $\frac{2}{5}x = 2$ $x = 5$ (5) $-\frac{1}{5}x = 6$ $x = -30$ (6) $-\frac{3}{4}x = -6$ $x = 8$

H Resuelva $3x - 7 = 5$ aplicando las propiedades de la igualdad.

$3x - 7 = 5$

$3x - 7 + 7 = 5 + 7$ — Sumar 7 en ambos lados.

$3x = 12$

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ — Dividir entre 3 ambos lados.

$x = 4$ — R: $x = 4$

Para resolver una ecuación con variable x se aplican las propiedades de la igualdad transformándola en la forma $x = a$.

7 Resuelva aplicando las propiedades de la igualdad.

(1) $4x + 5 = -7$ $x = -3$ (2) $1 - 3x = 7$ $x = -2$ (3) $6x + 3 = 21$ $x = 3$

(4) $-5x - 1 = -11$ $x = 2$ (5) $-2x - 7 = 1$ $x = -4$ (6) $4x - 1 = 7$ $x = 2$

79

... viene de la página anterior.

5. Encontrar la solución de una ecuación por multiplicación. [G]

M: En la ecuación $\frac{1}{3}x = 4$ ¿Qué debe hacerse para encontrar el valor de x?

RP:Multiplicar la ecuación por 3 en ambos lados.

M: ¿Cuál es el resultado? ¿Por que?

RP: $\frac{1}{3}x \times 3 = 4 \times 3$. $x = 12$. Para encontrar el valor de x. Para que la x quede sola.

6. Resolver 6.

7. Encontrar la solución de una ecuación. [H]

M: ¿En qué se diferencia la ecuación $3x - 7 = 5$ con las resueltas anteriormente?

RP: Que en el miembro de la izquierda la variable está multiplicada por 3 y además se resta 7.

M: ¿Cómo hacemos para que quede el término $3x$ sólo?

RP: Sumar 7 en ambos lados.

M: ¿Cuál es el resultado al sumar 7 a ambos lados ?

RP: $3x - 7 + 7 = 5 + 7$. $3x = 12$

M: ¿Cuál es el resultado al dividir 3 en ambos lados en esta última ecuación? ¿Cuál es la solución?

RP: $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$. $x = 4$

* Concluir que se deja sólo el término con x en el lado izquierdo.

8. Resolver 7.

1. Transponer los términos de una ecuación. [I]

M: En la ecuación $3x - 4 = 5$ ¿Qué propiedad debemos aplicar primero para encontrar la solución?

RP: La de la suma. Sumar 4 a ambos lados.

M: Plantee esta operación sin efectuar la suma en el lado derecho.

RP: $3x - 4 + 4 = 5 + 4$.
$3x = 5 + 4$.

M: Relacione el -4 de la primera ecuación con el +4 de la última ecuación. ¿Qué puede concluir?

RP: Que el -4 del lado izquierdo al trasladarse al lado derecho cambia su signo.

* Desarrollar I(2) de forma similar.

2. Definir el proceso de transposición.

* Concluir que al aplicar las propiedades 1 y 2 se puede transformar un término de un lado de una ecuación al otro lado cambiando su signo.

* Llamar a este proceso transposición.

3. Transponer los términos de una ecuación. [J]

M: En la ecuación $5x - 4 = 3x + 6$ transpongan los términos con x al lado izquierdo y los demás al lado derecho. ¿Cuál es el resultado?

RP: $5x - 3x = 6 + 4$.

M: ¿Cuáles términos cambian de signo?

RP: $3x$ de la derecha cambia a $-3x$ a la izquierda. -4 de la izquierda cambia a +4 a la derecha.

M: Efectúen las operaciones en $5x - 3x = 6 + 4$. ¿Cuál es el resultado?

RP: $2x = 10$.

* Concluir que la ecuación $2x = 10$ tiene la forma $ax = b$ e indicar la definición de ecuación de primer grado.

Lección 1:* *(6~8/11)

Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo:
- Transponer los términos de una ecuación.
- Encontrar la solución de una ecuación usando transposición.

Materiales:

Sección 5: Solución de ecuaciones de primer grado por trasposición de términos

I El siguiente ejercicio muestra la transformación de dos ecuaciones.

(1) $3x - 4 = 5$
$3x - 4 + 4 = 5 + 4$
$3x = 5 + 4$

(2) $5x = 2x = 12$
$5x - 2x = 2x + 12 - 2x$
$5x - 2x = 12$

1 En cada caso, ¿cuál de las propiedades de la igualdad se utiliza?

En (1) Propiedad 1 Sumar 4 en ambos lados mantiene la igualdad.

En (2) Propiedad 2 Restar $2x$ en ambos lados mantiene la igualdad.

2 Compare las ecuaciones anteriores, ¿qué observa?

En (1) El término -4 en el lado izquierdo, se trasladó al lado derecho cambiando su signo.

En (2) El término $2x$ en el lado derecho, se trasladó al lado izquierdo cambiando su signo.

Aplicando las propiedades 1 y 2 se puede trasladar un término de un lado la ecuación al otro lado cambiando su signo. Este proceso se llama **transposición**.

J En la ecuación $5x - 4 = 3x + 6$ transponga los términos que contienen x al lado izquierdo y los demás términos al lado derecho.

$5x - 4 = 3x + 6$
$5x - 3x = 6 + 4$
$2x = 10$

La ecuación $5x - 4 = 3x + 6$ se ha convertido en la forma $ax = b$ por medio de la transposición.

La ecuación que se puede transformar a la forma $ax = b$ ($a \neq 0$) por medio de la transposición se llama **ecuación de primer grado**.

8 En las siguientes ecuaciones transponga los términos para que sean de la forma $ax = b$.

(1) $2x + 3 = -x$ $3x = -3$ (2) $8 = 3x - 1$ $-3x = -9$ (3) $-2x - 1 = 3x + 14$ $-5x = 15$

(4) $4x + 1 = x + 4$ $3x = 3$ (5) $6x - 5 = 2x + 7$ $4x = 12$ (6) $3x + 1 = x + 9$ $2x = 8$

4. Resolver 8.

Hay que tener cuidado al explicar a los estudiantes la forma $ax = b$. En esta clase sólo se espera que se llegue a esta forma, sin embargo, si quieren encontrar la solución pueden hacerlo.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: **(6~8/11)**

Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo: [Continuación]

Materiales:

K Resuelva la ecuación $7x - 3 = 2x - 23$ por medio de la transposición.

$7x - 3 = 2x - 23$

$7x - 2x = -23 + 3$ .... Transponiendo -3 y $2x$

$5x = -20$ .... Efectuando la suma

$\frac{5x}{5} = \frac{-20}{5}$ .... Dividiendo entre 5

$x = -4$

R: $x = -4$

9 Resuelva la ecuación cambiándola a la forma $x = \frac{b}{a}$ usando la transposición.

(1) $9x - 3 = 5x + 9$ $x = 3$ (2) $-3x + 5 = -x - 1$ $x = 3$ (3) $-5x + 3 = x - 3$ $x = 1$

(4) $2x + 5 = 4x - 3$ $x = 4$ (5) $x + 4 = -3x$ $x = -1$ (6) $-x + 5 = 4x - 10$ $x = 3$

Procedimiento para resolver una ecuación de primer grado.

1. Transponer los términos con x al lado izquierdo y los otros al lado derecho.
2. Calcular cada lado y escribir la ecuación en la forma $ax = b$.
3. Dividir ambos lados entre el coeficiente de x, es decir, encontrar $x = \frac{b}{a}$.

Se dice **despejar** al proceso de encontrar el valor de x como solución.

10 Resuelva las siguientes ecuaciones.

(1) $-1 - 3x = 2x + 9$ $x = -2$ (2) $4 = -3y + 13$ $y = 3$

(3) $5x - 5 = 26 + 4x$ $x = 31$ (4) $10 + 2y = 12 + 3y$ $y = -2$

(5) $5 + x = 2x + 1$ $x = 4$ (6) $4x - 1 = 2x - 15$ $x = -7$

(7) $6x + 7 = 17$ $x = \frac{5}{3}$ (8) $4 - 3x = 4 - x$ $x = 0$

(9) $-6x = 12 - 2x$ $x = -3$ (10) $6 + 2x = 5x - 3$ $x = 3$

81

Es importante que los estudiantes justifiquen cada paso en la resolución de las ecuaciones.

... viene de la página anterior.

5. Encontrar la solución de una ecuación. [K]

M: Para encontrar la solución de $7x - 3 = 2x - 23$ ¿Qué es lo primero que hay que hacer?

RP: Transponer los términos.

M: ¿Cuáles términos cambian de signo?

RP: $2x$ de la derecha cambia a $-2x$ a la izquierda. -3 de la izquierda cambia a +3 a la derecha.

M: ¿Cómo queda la ecuación al transponer los términos?

$7x - 2x = -23 + 3.$

M: Efectúen las operaciones en $7x - 2x = -23 + 3$. ¿Cuál es el resultado?

RP: $5x = -20$.

M: ¿Qué propiedad debemos aplicar para encontrar la solución de la ecuación anterior?

RP: Dividir entre 5 ambos lados.

M: ¿Cuál es la solución?

RP: $\frac{5x}{5} = -\frac{20}{5}$. $x = 4$.

* Concluir que la ecuación $x = -\frac{20}{5}$ es de la forma $x = \frac{b}{a}$.

6. Resolver 9.

7. Conocer el procedimiento para resolver una ecuación de primer grado.

* Discutir los pasos dados en el LE y ejemplificarlos.

* Analizar los términos “coeficiente de x” y “despejar”.

8. Resolver 10.

1. Encontrar la solución de una ecuación con paréntesis. [L]

M: ¿En qué se diferencia la ecuación $2(x - 3) + 5 = -x + 8$ de las resueltas anteriormente?

RP: Que ésta tiene paréntesis.

M: ¿Qué es lo primero que hay que hacer para resolverla?

RP: Eliminar los paréntesis. Hacer la multiplicación.

M: ¿Cuál es el resultado al efectuar la multiplicación?

RP: $2x - 6 + 5 = -x + 8$

* Pedir a los estudiantes que sigan resolviendo la ecuación aplicando los conocimientos anteriores.
* Aclarar que al multiplicar los paréntesis se eliminan.

2. Resolver 11.

3. Encontrar la solución de una ecuación con números decimales. [M1 y M2]

M: En la ecuación $x + 0.6 = 0.2x + 3$ ¿Qué podemos hacer para convertir los decimales en números naturales?

RP: Multiplicar por 10.

M: Plantee la multiplicación a ambos lados por 10 y encuentren el resultado.

RP: $(x + 0.6) \times 10 = (0.2x + 3) \times 10$. $10x + 6 = 2x + 30$

* Pedir a los estudiantes que sigan resolviendo la ecuación aplicando los conocimientos anteriores.

4. Comparan la forma de resolver la ecuación en [M1]

* Hacer entender que se puede resolver más fácilmente con la forma dada en **M1**.

5. Resolver 12.

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (9~11/11) Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo:
- Encontrar la solución de ecuación de primer grado con signos de agrupación, con coeficientes decimales y expresados en forma racional.

Materiales:

Sección 6: Resolución de ecuaciones de primer grado

L Resuelva la ecuación $2(x - 3) + 5 = -x + 8$. Para empezar elimine los paréntesis.

$2(x - 3) + 5 = -x + 8$
$2x - 6 + 5 = -x + 8$ .... Eliminando paréntesis
$2x + x = 8 + 6 - 5$ .... Transponiendo términos
$3x = 9$ .... Efectuando la suma
$x = 3$ .... Dividiendo entre 3
R: $x = 3$

11 Resuelva las siguientes ecuaciones.

(1) $1 + 4(x - 2) = - 5 - 5(x - 5)$ $x = 3$
(2) $2x + 5(x + 3) = 3(x + 6) + 5$ $x = 2$
(3) $5 - 4(3x + 1) = 1 + 4(2x + 20)$ $x = -4$
(4) $5(3x - 2) = 2(x + 3) - 3$ $x = 1$
(5) $3(5x - 4) + 3 = 10x + 6$ $x = 3$
(6) $2(x - 1) + 2x = 3(x + 1) - 5$ $x = 0$

M1 Resuelva $x + 0.6 = 0.2x + 3$. Para empezar multiplique por 10 ambos lados.

$x + 0.6 = 0.2x + 3$
$(x + 0.6) \times 10 = (0.2x + 3) \times 10$ .... Multiplicando por 10 ambos lados
$10x + 6 = 2x + 30$ .... Eliminando paréntesis
$10x - 2x = 30 - 6$ .... Transponiendo términos
$8x = 24$ .... Efectuando la suma
$x = 3$ .... Dividiendo entre 8
R: $x = 3$

2 ¿Por qué se puede calcular de esta manera?

Porque multiplicando el mismo número a ambos lados la igualdad se mantiene.

Notas: La ecuación anterior se puede resolver transponiendo primero los términos, así:

$x + 0.6 = 0.2x + 3$
$x - 0.2x = 3 - 0.6$ .... Transponiendo términos
$0.8x = 2.4$ .... Efectuando la suma
$x = 3$ .... Dividiendo entre 0.8
R: $x = 3$

12 Resuelva las siguientes ecuaciones.

(1) $0.3x + 4 = 0.2x + 4.4$ $x = 4$
(2) $0.9x + 2 = x + 1.7$ $x = 3$
(3) $2x - 0.3 = 1.7x + 2.1$ $x = 8$
(4) $3.1x + 0.4 = 3.5x - 0.4$ $x = 2$
(5) $5x - 3.4 = 1.5x + 0.1$ $x = 1$
(6) $0.2x + 1.5 = 0.25x - 0.1$ $x = 32$

Lección 1: (9~11/11)

Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo: [Continuación]

Materiales:

$N1$ Resuelva $\frac{5}{6}x - 7 = \frac{1}{4}x$.

Multiplicar por 12 que es el mcm de 4 y 6.

$\frac{5}{6}x - 7 = \frac{1}{4}x$

$(\frac{5}{6}x - 7) \times 12 = \frac{1}{4}x \times 12$ ...... Multiplicando por 12 ambos lados

$\frac{5}{6}x \times 12 - 7 \times 12 = \frac{1}{4}x \times 12$ ...... Propiedad distributiva

$10x - 84 = 3x$ .... Efectuando la multiplicación

$10x - 3x = 84$ .... Transponiendo términos

$7x = 84$ .... Efectuando la suma

$x = 12$ .... Dividiendo entre 7

R: $x = 12$

2 ¿Por qué razón se puede resolver $\frac{5}{6}x - 7 = \frac{1}{4}x$ con el procedimiento anterior?

Porque multiplicando el mismo número a ambos lados la igualdad se mantiene.

Notas: La ecuación anterior se puede resolver al transponer los términos primero.

$\frac{5}{6}x - 7 = \frac{1}{4}x$

$\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}x = 7$ .... Transponiendo términos

$\frac{7}{12}x = 7$ .... Efectuando la suma

$x = 12$ .... Dividiendo entre $\frac{7}{12}$ ambos lados

R: $x = 12$

13 Resuelva las siguientes ecuaciones.

(1) $\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x - 1$ $x = 6$

(2) $\frac{3}{4}x - 2 = \frac{1}{4}$ $x = 3$

(3) $\frac{1}{9}x + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$ $x = 3$

(4) $\frac{3}{2} - 4x = \frac{5}{3}x - \frac{59}{6}$ $x = 2$

(5) $7x + \frac{5}{6} = \frac{17}{8}x + \frac{137}{24}$ $x = 1$

(6) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = x - \frac{23}{12}$ $x = 4$

83

... viene de la página anterior.

6. Encontrar la solución de una ecuación con números racionales. [N1]

M: ¿En qué se diferencia la ecuación $\frac{5}{6}x - 7 = \frac{1}{4}x$ de las resueltas anteriormente?

RP: Que ésta tiene fracciones. Que tiene números racionales.

M: ¿Cómo podemos eliminar los denominadores 6 y 4.

RP: Utilizando el mcm de 4 y 6.

M: ¿Cuál es el mcm de 4 y 6?

RP: Es 12.

M: ¿Qué hacemos ahora?

RP: Multiplicar por 12 ambos miembros de la ecuación.

M: ¿Cuál es el resultado?

RP: $(\frac{5}{6}x - 7) \times 12 = \frac{1}{4}x \times 12$.
$10x - 84 = 3x$.

* Pedir a los estudiantes que sigan resolviendo la ecuación aplicando los conocimientos anteriores.

7. Justificar la razón del procedimiento anterior. [N2]

M: ¿Por qué multiplicamos por 12 que es el mcm de los denominadores?

RP: Para convertir los números racionales en naturales.

* Hacer énfasis en que esta forma facilita el cálculo.

8. Comparar la forma de resolver la ecuación en [N1]

* Hacer entender que se puede resolver más fácilmente con la forma dada en **[N1]**.

9. Resolver 13.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

10. Encontrar la solución de una ecuación expresada en forma racional. [O]

M: ¿En qué se diferencia la ecuación $\frac{x - 2}{6} = \frac{x + 4}{9}$ de las resueltas anteriormente?

RP: Que ambos miembros están expresados en forma racional.

M: ¿Cómo podemos eliminar los denominadores 6 y 9.

RP: Utilizando el mcm de 6 y 9.

M: ¿Cuál es el mcm de 6 y 9?

RP: Es 18.

M: ¿Qué hacemos ahora?

RP: Multiplicar por 18 en ambos miembros de la ecuación.

M: ¿Cuál es el resultado?

RP: $\left(\frac{x - 2}{6}\right) \times 18 = \left(\frac{x + 4}{9}\right) \times 18.$

$3x - 6 = 2x + 8.$

* Pedir a los estudiantes que sigan resolviendo la ecuación aplicando los conocimientos anteriores.

11.Resolver 14 .

12. Encontrar la solución de una ecuación expresada en forma racional. [P]

M: ¿En qué se diferencia la ecuación $\frac{3x - 8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{16}$ de las resueltas anteriormente?

RP: Que tiene varias fracciones.

M: ¿Cómo podemos eliminar los denominadores 2, 3 y 6.

RP: Utilizando el mcm de 2, 3 y 6.

* Continuar desarrollando en forma similar a las anteriores

13. Resolver 15 .

Lección 1: (9~11/11) Ecuaciones de primer grado en una variable

Objetivo: [Continuación]

Materiales:

O Resuelva $\frac{x - 2}{6} = \frac{x + 4}{9}$.

Para empezar multiplique por 18 que es el mcm de los denominadores 6 y 9.

$\frac{x - 2}{6} = \frac{x + 4}{9}$

$\left(\frac{x - 2}{6}\right) \times 18 = \left(\frac{x + 4}{9}\right) \times 18$ .... Multiplicando por 18 ambos lados

$(x - 2) \times 3 = (x + 4) \times 2$ .... Convirtiendo números racionales en naturales

$3x - 6 = 2x + 8$ .... Propiedad distributiva

$3x - 2x = 8 + 6$ .... Transponiendo términos

$x = 14$ .... Efectuando la suma

14 Resuelva.

(1) $\frac{x - 8}{4} = \frac{x - 5}{6}$ $x = 14$ (2) $\frac{x + 5}{3} = \frac{10 - x}{2}$ $x = 4$ (3) $\frac{2x - 7}{5} = \frac{x - 2}{4}$ $x = 6$

(4) $\frac{3x - 4}{5} = \frac{2x + 1}{7}$ $x = 3$ (5) $\frac{3x - 4}{2} = \frac{8x - 3}{13}$ $x = 2$ (6) $\frac{5x - 1}{6} = \frac{x + 3}{2}$ $x = 5$

P Resuelva $\frac{3x - 8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Para empezar multiplique por 6 que es el mcm de los denominadores 2, 3 y 6.

$\frac{3x - 8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\left(\frac{3x - 8}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 6 = \frac{1}{6} \times 6$ .... Multiplicando por 6 ambos lados

$\left(\frac{3x - 8}{2}\right) \times 6 - \frac{1}{3} \times 6 = 1$ .... Propiedad distributiva

$3(3x - 8) - 2 = 1$ .... Convirtiendo números racionales en naturales

$9x - 24 - 2 = 1$ .... Eliminando paréntesis

$9x = 1 + 24 + 2$ ...... Transponiendo términos

$9x = 27$ .... Efectuando la suma

$x = 3$ .... Dividiendo entre 9

R: $x = 3$

15 Resuelva las siguientes ecuaciones.

(1) $\frac{4x - 3}{7} = \frac{3x - 8}{4} + \frac{1}{2}$ $x = 6$ (2) $\frac{x + 4}{7} + \frac{x - 8}{2} = 3$ $x = 10$ (3) $x - 1 = \frac{3x - 2}{5} + 1$ $x = 4$

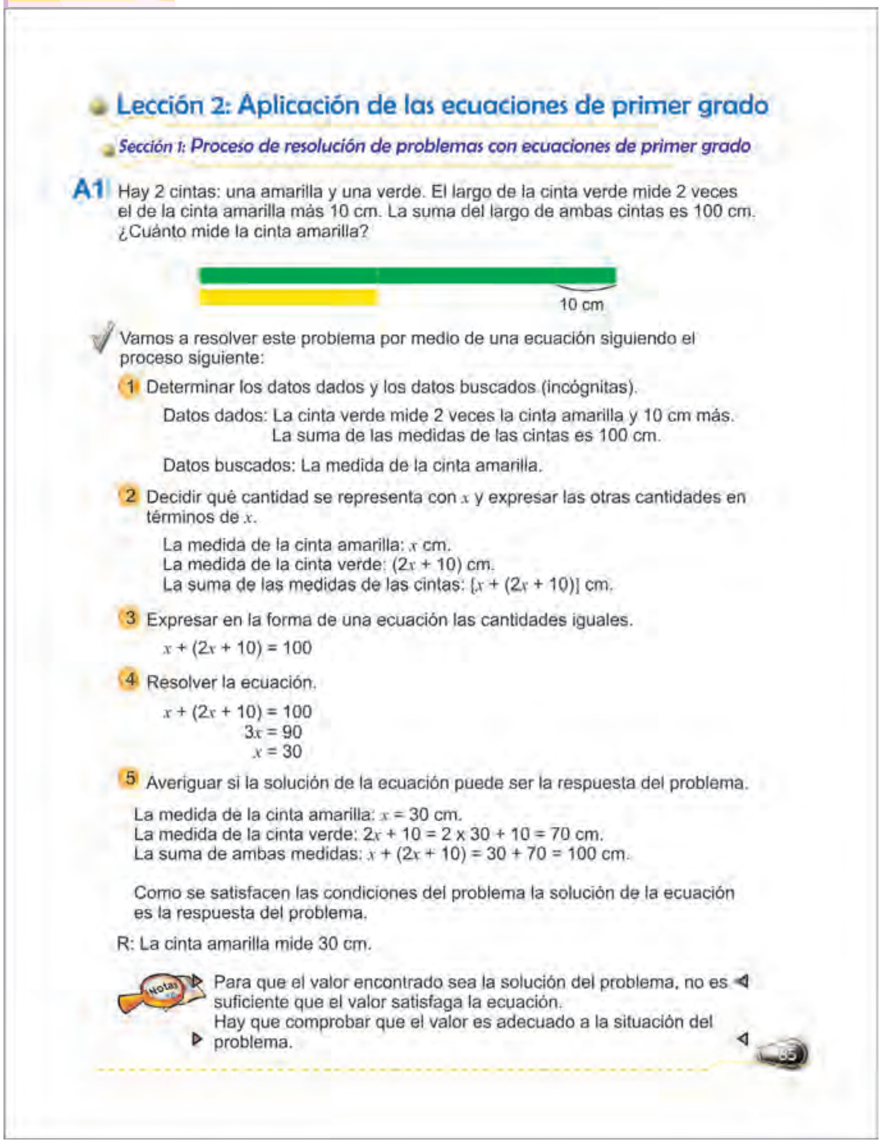
(4) $\frac{3x - 1}{2} - \frac{2 - x}{6} = \frac{65}{6}$ $x = 7$ (5) $\frac{x + 6}{4} + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$ $x = 6$ (6) $\frac{5}{3} + \frac{x}{2} = \frac{25}{6}$ $x = 5$

Lección 2: (1~2/9)

Aplicación de las ecuaciones de primer grado

Objetivo: • Conocer el proceso para la resolución de problemas utilizando ecuaciones de primer grado.

Materiales: (M) LE, cintas de colores.



Lección 2: Aplicación de las ecuaciones de primer grado

Sección 1: Proceso de resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

A1 Hay 2 cintas: una amarilla y una verde. El largo de la cinta verde mide 2 veces el de la cinta amarilla más 10 cm. La suma del largo de ambas cintas es 100 cm. ¿Cuánto mide la cinta amarilla?

10 cm

Vamos a resolver este problema por medio de una ecuación siguiendo el proceso siguiente:

1. Determinar los datos dados y los datos buscados (incógnitas).

   Datos dados: La cinta verde mide 2 veces la cinta amarilla y 10 cm más. La suma de las medidas de las cintas es 100 cm.

   Datos buscados: La medida de la cinta amarilla.

2. Decidir qué cantidad se representa con x y expresar las otras cantidades en términos de x.

   La medida de la cinta amarilla: x cm.
   La medida de la cinta verde: $(2x + 10)$ cm.
   La suma de las medidas de las cintas: $[x + (2x + 10)]$ cm.

3. Expresar en la forma de una ecuación las cantidades iguales.

   $x + (2x + 10) = 100$

4. Resolver la ecuación.

   $x + (2x + 10) = 100$
   $3x = 90$
   $x = 30$

5. Averiguar si la solución de la ecuación puede ser la respuesta del problema.

   La medida de la cinta amarilla: $x = 30$ cm.
   La medida de la cinta verde: $2x + 10 = 2 \times 30 + 10 = 70$ cm.
   La suma de ambas medidas: $x + (2x + 10) = 30 + 70 = 100$ cm.

   Como se satisfacen las condiciones del problema la solución de la ecuación es la respuesta del problema.

R: La cinta amarilla mide 30 cm.

Notas: Para que el valor encontrado sea la solución del problema, no es suficiente que el valor satisfaga la ecuación. Hay que comprobar que el valor es adecuado a la situación del problema.

85

1. Comentar el problema. [A1]

* Hacer preguntas para comprender el problema.
* Pedir una representación gráfica del problema para una mejor comprensión del mismo.
* Resolver el problema siguiendo el proceso planteado.

2. Determinar los datos. (Paso 1)

M: ¿Cuáles datos nos dan en el problema?

RP: La medida de la cinta verde. La suma de las medidas de las cintas.

M: ¿Qué es lo que queremos encontrar?

RP: La medida de la cinta amarilla.

3. Representar con x las cantidades. (Paso 2)

M: ¿Qué cantidad podemos representar con x?

RP: La medida de la cinta amarilla.

M: ¿Cómo podemos representar la medida de la cinta verde en términos de x?

RP: $2x + 10$.

M: ¿La suma de ambas cómo se puede representar?

RP: $x + (2x + 10)$

4. Expresar como una ecuación. (Paso 3)

M: ¿Cómo se pueden expresar las cantidades iguales como una ecuación?

RP: $x + (2x + 10) = 100$

5. Resolver la ecuación. (Paso 4)

* Hacerlo conforme a lo aprendido en clases.

6. Determinar si la solución de la ecuación es la respuesta al problema. (Paso 5)

* Comprobar de acuerdo al paso 5 del LE.

7. Entender qué significa la solución del problema.

* Hacer entender que el valor tiene que ser adecuado a la situación del problema.
* Véase puntos de lección.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

8. Comentar el problema. [A2]

* Hacer preguntas para comprender el problema.

9. Resolver el problema.

* Resolver el problema en forma similar a la clase anterior siguiendo los cinco pasos planteados en el LE.
* Es importante que los estudiantes se den cuenta que si x representa el precio de un lápiz, el precio de 6 lápices se representa por $6x$. Igual si $x + 2$ representa el precio de un bolígrafo, $10(x + 2)$ representa el precio de 10 bolígrafos.
* El paso 5 es indispensable en la solución del problema.

Lección 2: (1~2/9)

Aplicación de las ecuaciones de primer grado

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

2 Resolver el problema presentado a continuación siguiendo los pasos realizados anteriormente (1 a 5).

Se compraron 6 lápices y 10 bolígrafos a 100 Lempiras. Un bolígrafo cuesta 2 Lempiras más que un lápiz. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Cuánto cuesta un bolígrafo?

1 Determinar los datos dados y los datos buscados.

Datos dados: Se compraron 6 lápices y 10 bolígrafos a 100 Lempiras.
Un bolígrafo cuesta 2 Lempiras más que un lápiz.

Datos buscados: El precio de un lápiz. El precio de un bolígrafo.

2 Decidir qué cantidad será x y expresar las otras cantidades en términos de x.

El precio del lápiz: x (Lempiras)
El precio del bolígrafo: $x + 2$ (Lempiras)
La suma de los precios: $6x + 10(x + 2)$

3 Expresar en la forma de una ecuación las cantidades iguales.

$$6x + 10(x + 2) = 100$$

4 Resolver la ecuación.

$$6x + 10(x + 2) = 100$$
$$6x + 10x + 20 = 100$$
$$16x = 100 - 20$$
$$16x = 80$$
$$x = 5$$

5 Averiguar si la solución de la ecuación puede ser la respuesta del problema.

El precio de un lápiz: $x = 5$ (Lempiras).
El precio de un bolígrafo: $x + 2 = 5 + 2 = 7$ (Lempiras).
La suma de los precios: $6x + 10(x + 2) = 6(5) + 10(5 + 2) = 100$ (Lempiras).

Se satisfacen las condiciones del problema.

R: El precio de un lápiz es 5 Lempiras y el de un bolígrafo es 7 Lempiras.

Lección 2: *(3~9/9)*

Aplicación de las ecuaciones de primer grado

Objetivo: • Resolver problemas utilizando ecuaciones de primer grado.

Materiales:

Sección 2: Miscelánea de problemas

B Ana compró un bolígrafo de 7 Lempiras y 3 cuadernos. Pagó 34 Lempiras por todo. ¿Cuánto es el precio de un cuaderno?

Sí el precio de un cuaderno es x Lempiras se tiene:

$$7 + 3x = 34$$
$$3x = 34 - 7$$
$$3x = 27$$
$$x = 9$$

Este valor es un número natural y satisface la condición del problema.
R: El precio de un cuaderno es de 9 Lempiras.

1 Resuelva.

(1) María tenía 70 Lempiras y Juan 55. Los dos compraron el mismo libro y ahora María tiene 2 veces lo que tiene Juan. ¿Cuál es el precio del libro?

si el libro cuesta x Lempiras PO: $70 - x = 2(55 - x)$; $x = 40$ R: El precio es 40 Lempiras

(2) Marta tiene 11 años y su madre 28. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el doble de la edad de la hija?

dentro de x años la edad de la madre es PO: $2(11 + x) = 28 + x$; $x = 6$ R: Dentro de 6 años

C Se van a repartir confites a varios niños. Si se le dan 7 confites a cada uno sobran 6, si se le dan 9 confites a cada uno no sobra nada. ¿Cuántos niños hay?

Si hay x niños se tiene:

$$7x + 6 = 9x$$
$$7x - 9x = - 6$$
$$-2x = - 6$$
$$x = 3$$

Si hay 3 niños la cantidad total de confites es $7x + 6 = 7 \times 3 + 6 = 27$, es decir se pueden repartir 21 confites a los 3 niños y sobran 6 confites. Si se dan 9 confites a cada uno de los 3 niños son 27 confites y no sobra nada.
Estas cantidades satisfacen la condición del problema.

R: Hay 3 niños.

2 Resuelva.

(1) Se van a repartir tarjetas a los alumnos. Si se le dan 6 tarjetas a cada uno sobran 8. Si se le dan 8 tarjetas a cada uno faltan 6.
¿Cuántas tarjetas hay y a cuántos alumnos se pueden repartir las tarjetas?

si hay x alumnos PO: $6x + 8 = 8x - 6$; $x = 7$ R: Hay 50 tarjetas y se pueden repartir a 7 alumnos

(2) Pedro es cinco años mayor que María.
¿Qué edad tienen si el doble de la edad de Pedro es el triple de la de María?

si María tiene x años de edad PO: $3x = 2(x + 5)$; $x = 10$ R: María tiene 10 años y Pedro 15

67

Notas: Resolver los problemas de ésta sección dependiendo del ritmo de los estudiantes.

1. **Resolver el problema. [B]**
   * Resolver el problema siguiendo el proceso dado en la sección 1.
   * Es importante que los estudiantes se den cuenta que en este problema el precio del bolígrafo es un número (9) y no se necesita expresarlo con una variable.
2. **Resolver 1.**
3. **Resolver el problema. [C]**
   * Resolverlo en forma similar a los desarrollados anteriormente.
4. **Resolver 2.**
   * Hay que aclarar que significa x.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

5. Resolver el problema. [D]

* Resolverlo en forma similar a los desarrollados anteriormente.
* Pedir una representación gráfica del problema para una mejor comprensión del mismo.
* Es importante que los estudiantes se den cuenta que en este problema la cantidad de minutos de recorrido de Luis es la misma que la cantidad de minutos recorridos por Gloria después de los 6 minutos que ella salió.

6. Resolver 3.

7. Resolver el problema. [E]

* Resolverlo en forma similar a los desarrollados anteriormente.
* Es importante que los estudiantes se den cuenta que para resolver este problema utilizando ecuaciones es necesario utilizar la fórmula $t = \frac{d}{v}$.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (3~9/9)

Aplicación de las ecuaciones de primer grado

[Continuación]

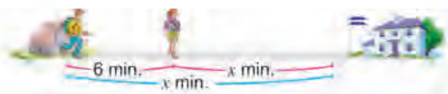
Objetivo:

Materiales:

D Gloria salió de la casa para la escuela que dista 1200 m. Seis minutos después su hermano Luis salió de la casa para la escuela. Si Gloria caminó a la velocidad de 50 m por minuto y Luis a 80 m por minuto, ¿después de cuántos minutos de la salida de Luis, él la alcanzará?

Si Luis alcanza a Gloria después de x minutos de su salida se tiene:

$80x = 50(x + 6)$
$30x = 300$
$x = 10$



Después de 10 minutos Luis estará 80 x 10 = 800 m de la casa. Como la escuela dista 1200 m de la casa, Luis puede alcanzar a Gloria antes que ella llegue a la escuela.
R: La alcanzará después de 10 minutos

3 Resuelva.

(1) En D, si Luis sale de la casa 10 minutos después de la salida de Gloria. ¿Él puede alcanzarla?

Si el niño salió x minutos antes PO: $80x = 50(x + 10)$; $x = 16.67$, $16.67 \times 80 = 1333.6$ m R: No

(2) Un niño salió determinada cantidad de minutos antes que un señor. El niño corre a una velocidad de 50 m por minuto y el señor a 120 m por minuto. El señor alcanzó al niño a los 15 minutos. ¿Cuántos minutos antes salió el niño?

Si el niño salió x minutos antes PO: $50(x + 15) = 120 \times 15$; $x = 21$ R: 21 minutos antes

E Un día Juan se levantó un poco tarde y corrió hasta la escuela. Tardó 3 minutos menos que lo que tarda caminando. Si él camina a 70 m por minuto y corre a 100 m por minuto, ¿cuántos metros dista la escuela?

Si dista x m se tiene: $\frac{x}{70} - 3 = \frac{x}{100}$ .... Tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$

$10x - 2100 = 7x$ .... Multiplicando por 700
$3x = 2100$
$x = 700$

Si dista 700 m se tarda caminando $\frac{x}{70} = \frac{700}{70} = 10$ minutos y corriendo $\frac{x}{100} = \frac{700}{100} = 7$ minutos y se cumple la condición del problema.
R: La escuela dista 700 m.

Lección 2: (3~9/9)

Aplicación de las ecuaciones de primer grado

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

4 Resuelva.

Ana fue en bicicleta a la casa de su tio. Corrió a 12 Km por hora para ir y 16 Km por hora para regresar y tardó 7 horas. ¿Cuál es la distancia entre las dos casas?

En el ejercicio (1) Ana tiene un amigo que vive 7 Km antes de la casa del tio.

Si la distancia es x Km PO: $\frac{x}{12} + \frac{x}{16} = 7$; $x = 48$ R: 48 km

¿Cuál es la distancia a la casa del tio si corre a 12 Km por hora para ir a la casa del amigo y a 16 Km por hora para ir a la casa del tío? Ana se tarda 7 horas para hacer ambos recorridos a esas velocidades. ¿Cuánto tiempo se tarda para ir a la casa del tio y a la de su amigo? Sugerencia: guiese por el dibujo.

PO: $\frac{x-7}{12} + \frac{x}{16} = 7$; $x = 52$



R: 52 km, 3.25 h (casa del tío) y 3.75 h (casa del amigo)

F Hoy Ada cumplió 13 años de edad y su padre 43 años.
¿Cuándo el padre tendrá el triple de la edad de Ada?

Si la edad del padre será 3 veces la edad de Ada x años después se tiene:

$$43 + x = 3(13 + x)$$
$$43 + x = 39 + 3x$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$

2 años después Ada cumplirá 13 + 2 = 15 años y su padre 43 + 2 = 45 años.
Como 45 es 3 veces 15 se cumple la condición del problema.
R: 2 años después.

5 Resuelva.

(1) En el problema F, ¿cuándo el padre tendrá el doble de la edad de Ada?

Después de x años la edad del padre es PO: $2(13 + x) = 43 + x$, $x = 17$ R: 17 años después

(2) Lesli es 8 años menor que Alicia, ¿qué edad tiene cada una de ellas si la suma del doble de la edad de Lesli más la edad de Alicia es 20 años?

Si Lesli tiene x años PO: $2x + (x + 8) = 20$, $x = 4$ R: Lesli tiene 4 años y Alicia 12

(3) La madre de Jorge tiene 30 años y manifiesta que tiene 6 años menos que el cuádruple de la edad del hijo. ¿Qué edad tiene Jorge?

Si Jorge tiene x años PO: $4x - 6 = 30$; $x = 9$ R: Jorge tiene 9 años

89

... viene de la página anterior.

8. Resolver 4.

9. Resolver el problema. [F]

* Resolverlo en forma similar a los desarrollados anteriormente.
* Es importante que los estudiantes se den cuenta que en este problema la cantidad de años después debe ser igual tanto para la edad de la hija como para la del padre.

10. Resolver 5.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

11. Resolver el problema. [G]

* Resolverlo en forma similar a los desarrollados anteriormente.
* Pedir una representación gráfica del problema para una mejor comprensión del mismo.
* Es importante que los estudiantes se den cuenta que en este problema la capacidad total del tanque es igual a la cantidad de agua gastada en la mañana más la gastada por la tarde más los 100 galones.

12. Resolver 6.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (3~9/9)

Aplicación de las ecuaciones de primer grado

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

G Un tanque está lleno de agua. Se utiliza la cuarta parte por la mañana y la octava parte por la tarde quedando en el tanque 100 galones.
¿Cuál es la capacidad del tanque?

Si x galones representa la capacidad del tanque, entonces

$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 100$$

$8x = 2x + x + 800$ .... Multiplicando por 8
$5x = 800$
$x = 160$

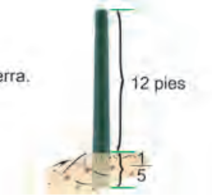
Como la cuarta parte de 160 es 40 y la octava parte es 20 y 40 + 20 + 100 = 160, entonces se cumple la condición.
R: La capacidad del tanque es de 160 galones.



6 Resuelva.

(1) Un poste tiene la quinta parte de su longitud bajo tierra.
La parte que está sobre el suelo mide 12 pies.
¿Cuántos pies de longitud mide el poste?

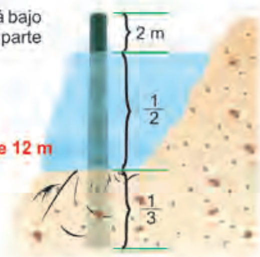
si el poste tiene x pies de longitud
PO: $x = \frac{x}{5} + 12$; $x = 15$ R: 15 pies



(2) Un número más su novena parte es igual a 20.
¿Cuál es el número?
si el número es x
PO: $x + \frac{x}{9} = 20$; $x = 18$ R: El número es 18

(3) La tercera parte de la longitud de un poste está bajo tierra, la mitad está sumergida en el agua y la parte que está encima del agua mide 2 metros.
Calcule la longitud del poste

si la longitud del poste mide x m
PO: $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2$; $x = 12$ R: El poste mide 12 m



Unidad 3: (3~9/9)

Ecuaciones de primer grado en una variable

[Continuación]

Materiales:

... viene de la página anterior.

13. Resolver 7.

7 Resuelva los siguientes problemas usando ecuaciones.

(1) La suma de las edades de José Carlos y Doris Alicia es 84 años. Doris Alicia tiene 8 años menos que José Carlos. Encuentre ambas edades.

Si José tiene x años PO: $x + (x - 8) = 84$; $x = 46$ R: José Carlos tiene 46 años y Doris Alicia 38

(2) Dos autos A y B salen de una misma ciudad a 70 Km/h y 90 Km/h respectivamente. El auto A sale 3 horas antes que el auto B. ¿Cuánto tiempo tarda el auto B para alcanzarlo? ¿Qué distancia recorre el auto B para alcanzar al auto A?.

Si tarda x horas PO: $70(x + 3) = 90x$; $x = 10.5$ R: Se tarda 10.5 horas
PO: $90 \times 10.5 = 945$ R: Recorre 945 km

(3) Encuentre dos números cuya suma sea 88 y su diferencia sea 12.

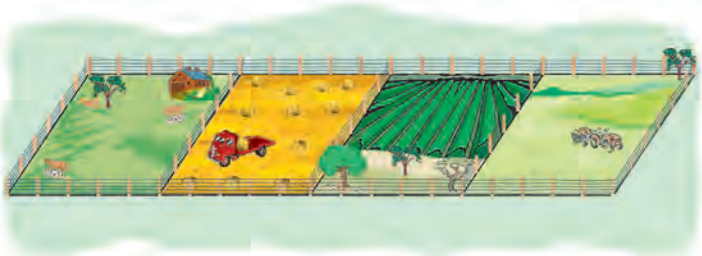
Si el número menor es y PO: $88 - y = 12 + y$; $y = 38$ PO. $x - (88 - x) = 12$ $x = 50$ R: 50 y 38

(4) El lado mayor de un triángulo es 8 cm más largo que el lado a. El lado b tiene 12 cm menos que el doble de la longitud del lado a. Si el perímetro es de 40 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?

Si el lado a mide x cm PO: $x + (x + 8) + (2x - 12) = 40$; $x = 11$ R: 10 cm, 11 cm, 19 cm

(5) Un granjero tiene un campo rectangular cuyo largo es 5 veces el ancho y lo quiere dividir en 4 parcelas iguales y cercarlas (véase la figura). ¿Cuál es la dimensión del terreno si emplea 180 metros para cercarlo con una hilera de alambre?

Si el ancho mide xm PO: $5x + 5x + x + x + x + x + x = 180$; $x = 12$ R: El terreno mide 60 m × 12 m



(6) Dividir 100 en tres partes tales que la segunda sea el doble de la primera y 20 unidades mayor que la tercera.

Si la primera parte es x PO: $x + 2x + (2x - 20) = 100$; $x = 24$ R: 24, 48 y 28

(7) El dígito de las decenas de un número es 4 veces el dígito de las unidades aumentado en uno. Si el número es 4 más 8 veces la suma de sus dígitos, encuentre el número.

Si el dígito de las unidades es x PO: $10(4x + 1) + x = 4 + 8((4x + 1) + x)$; $x = 2$ R: El número es 92

91

1. Resolver 1 ~ 4 .

Tipos de ejercicios:

1 Reconocimiento del uso de las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones de primer grado.

2 Escritura de ecuaciones de primer grado dada su solución.

3 Resolución de ecuaciones de primer grado.

Continúa en la siguiente página...

Unidad 3: (1~2/2)

Ecuaciones de primer grado en una variable

Ejercicios de la unidad

Ejercicios

1 En el proceso de resolver $\frac{x-2}{4} = \frac{2x-7}{5}$ se tiene:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{2x-7}{5}$$

$5(x-2) = 4(2x-7)$ .... (1) Multiplicando por 20 ambos lados, propiedad 3

$5x - 10 = 8x - 28$

$5x - 8x = -28 + 10$ .... (2) Transponiendo términos; propiedad 1 y 2

$-3x = -18$

$x = 6$ .... (3) Dividiendo entre -3; propiedad 4

(1) Justifique (1), (2) y (3).

(2) ¿Qué propiedades de la igualdad se aplicaron en el proceso?

2 Escriba 3 ecuaciones cuyas soluciones sean las siguientes.

(1) 1	(2) 0	(3) -4	(4) 8	(5) -10
$x + 3 = 4$	$3x + 2 = 2$	$2x + 10 = 2$	$\frac{x}{2} + 3 = 7$	$2x + 9 = -11$

3 Resuelva las siguientes ecuaciones.

(1) $5 - x = -2$ — $x = 7$

(2) $x + 3 = -8$ — $x = -11$

(3) $-x - 1 = 4$ — $x = -5$

(4) $-5x = 30$ — $x = -6$

(5) $4x = -28$ — $x = -7$

(6) $-8x = 40$ — $x = -5$

(7) $-\frac{3}{5}x = 15$ — $x = -25$

(8) $\frac{2}{3}x = 8$ — $x = 12$

(9) $\frac{6}{5}x = -18$ — $x = -15$

(10) $3x - 9 = 12$ — $x = 7$

(11) $x - 1 = 10$ — $x = 11$

(12) $-3x + 2 = 8$ — $x = -2$

(13) $x + 2 = 2x - 7$ — $x = 9$

(14) $5x - 1 = 2x - 29$ — $x = -\frac{28}{3}$

(15) $7x + 3 = 11x - 13$ — $x = 4$

(16) $3(2x + 5) - 1 = 5x + 16$ — $x = 2$

(17) $2(x - 2) = 3(x - 8) + 10$ — $x = 10$

(18) $x + 0.3 = 0.7x + 2.4$ — $x = 7$

(19) $2x + 0.9 = 3x - 3.1$ — $x = 4$

(20) $5x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}x + \frac{73}{6}$ — $x = 3$

(21) $\frac{1}{4}x + 2 = \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}$ — $x = 3$

(22) $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{x+2}{5}$ — $x = 4$

(23) $\frac{x-2}{2} = \frac{3x-4}{10} + \frac{1}{5}$ — $x = 4$

Ecuaciones de primer grado en una variable

[Continuación]

... viene de la página anterior.

4 Resolución de problemas aplicando las ecuaciones de primer grado.

4 Resuelva empleando ecuaciones de primer grado.

(1) Se venden cuadernos a 10 Lempiras y lápices a 6 Lempiras. Juan quiere comprar un cuaderno y unos lápices de modo que el precio total sea 30 Lempiras. ¿Cuántos lápices tiene que comprar?

Si compra x lapices PO: $6x + 10 = 30$; $x = 3\frac{1}{3}$ R: No hay solución.

(2) En un corral hay 15 animales entre conejos y gallinas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay si se cuentan 54 patas?

Si hay x conejos PO: $4x + 2(15 - x) = 54$; $x = 12$ R: Hay 12 conejos y 3 gallinas

(3) La suma de 3 números es 70. El segundo número es el doble del primero y el tercero es el doble del segundo. ¿Cuáles son los números?

Si el primero es x PO: $x + 2x + 4x = 70$; $x = 10$ R: Los números son 10, 20 y 40

(4) ¿Cuál es la longitud de una pieza de tela si después de haber vendido la tercera, la sexta y 5 doceavas partes quedan 50 cm?

Si la longitud mide x cm PO: $x = \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{5x}{12} + 50$; $x = 600$ R: La tela mide 600 cm

(5) El lado menor de un rectángulo mide 8 m. ¿Cuántos metros mide el lado mayor si el perimetro mide 40 m?

Si el lado mayor mide x m PO: $2x + 16 = 40$; $x = 12$ R: El lado mayor mide 12 cm

(6) La suma de dos números consecutivos es 87. ¿Cuáles son estos números?

Si el primer número es x PO: $x + (x + 1) = 87$; $x = 43$ R: Los números son 43 y 44

(7) Pedro tiene 4 años más que Juan. ¿Qué edad tienen, si 5 veces la edad de Juan es 3 veces la edad de Pedro?

Si Juan tiene x años PO: $5x = 3(x + 4)$; $x = 6$ R: Las edades son 6 y 10 años

(8) La suma de 3 múltiplos consecutivos de 3 es 72. ¿Cuáles son estos números?

Si el primer número es x PO: $x + (x + 3) + (x + 6) = 72$; $x = 21$ R: Los números son 21, 24 y 27

(9) Se van a repartir confites entre varios niños. Si a cada uno se le da 15 confites sobran 13 y si se les da 16 confites faltan 8. ¿Cuántos niños y cuántos confites hay?

Si hay x niños PO: $15x + 13 = 16x - 8$; $x = 21$ R: Hay 21 niños y 328 confites

(10) Gloria sale para un lugar a determinada cantidad de minutos antes que su hermano Luis. Él la alcanzó en 20 minutos. Si se sabe que Gloria camina a una velocidad de 40 m/minuto y Luis a 90 m/minuto. ¿Cuántos minutos antes salió Gloria que Luis?
Sugerencia: vea el ejemplo **D** (Lección 2).

Si Gloria salió x minutos antes PO: $40(x + 20) = 90 \times 20$; $x = 25$ R: Salió 25 minutos antes

(11) La suma del doble de un número, más la mitad de ese número, más la tercera parte de ese número, más tres es 20. ¿Cuál es el número?

Si el número es x PO: $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 3 = 20$; $x = 6$ R: El número es 6

1. **Resolver** 1 .

Ecuaciones de primer grado en una variable

Evaluación de la unidad

Evaluación

1 Encierre con un círculo la letra del inciso que hace verdadera la proposición.

(1) La ecuación $3x + 1 = -2x + 26$ es verdadera para

1) $x = 3$ 2) $x = 4$ 3) $x = -5$ (4) $x = 5$

(2) Es la solución para $2x - 5 = -x - 8$

1) $x = -3$ 2) $x = 3$ (3) $x = -1$ 4) $x = 1$

(3) Es la ecuación cuya solución es $x = 2$

(1) $2(x + 3) = 10$ 2) $2(x - 3) = 8$ 3) $2(x + 3) = 12$ 4) $2x = 0$

(4) Operación que se realiza en ambos lados de $3x - 5 = 4$ para transformarla en $3x = 9$.

1) Restar 5 2) Multiplicar por 5 (3) Sumar 5 4) Dividir entre 5

(5) Es una ecuación equivalente a $3x - 5 = 4$.

1) $12x - 20 = 0$ 2) $\frac{3x - 5}{4} = 0$ 3) $3x + 9 = 0$ (4) $3x - 9 = 0$

(6) Al resolver una ecuación, ésta debe quedar escrita en la forma

1) $ax + b = 0$ 2) $ax = b$ (3) $x = a$ 4) $ax - b = 0$

(7) En la ecuación $0.3x + 4 = 0.2x + 4.4$ para cambiar los coeficientes a números naturales, ésta debe multiplicarse por

1) 2 (2) 10 3) 15 4) 8

(8) Para simplificar el despeje de x en la ecuación $\frac{x}{12} + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}x$, se deben multiplicar ambos lados por

1) 12 2) 6 (3) 24 4) 8

(9) Operación qué se realiza en $4x = 12$ para transformarla en $x = 3$

1) Sumar 4 2) Restar 4 3) Multiplicar por 4 (4) Dividir entre 4

(10) ¿Cuál es el primer paso qué se hace para resolver una aplicación con ecuaciones de primer grado?

1) Decidir quién es la cantidad x (2) Determinar los datos y la incógnita

3) Expresar como ecuación la igualdad resultante 4) Resolver la ecuación.

Ecuaciones de primer grado en una variable

Evaluación de la unidad

2. Resolver 2 ~ 4.

2 Escriba si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

(1) $x = 4$ es solución de la ecuación $3x - 5 = 7$. ....(V)

(2) Si $3x - 5 = 2x + 3$ entonces $x = 7$. ....(F)

(3) Si a una ecuación se le suma 3 a ambos lados entonces la solución de la ecuación resultante es diferente a la solución de la primera.................(F)

(4) Una ecuación con números racionales únicamente se puede resolver multiplicándola por el mcm de los denominadores...........................(F)

(5) Toda respuesta a un problema de aplicación debe comprobarse..................(V)

3 Responda brevemente las siguientes preguntas.

(1) ¿Qué significa "resolver una ecuación"?
Encontrar la solución

(2) ¿Cuáles son las 4 propiedades de la igualdad que se emplean para resolver ecuaciones?
Se omite

(3) ¿Qué se entiende por transposición de términos?
Pasar de un miembro al otro

(4) ¿Cuáles son los pasos para resolver una ecuación de primer grado?
Se omite

(5) En una ecuación, ¿para qué se multiplican los números decimales por una potencia de 10?
Para convertirlos en números enteros

4 Haga lo que se le pide.

(1) Compruebe si los valores dados son soluciones de la ecuación.

1) $2x - 6 = 8$; $x = 5$ **No** 2) $x + 1 = 5$; $x = 4$ **Sí**

3) $\frac{x + 15}{3} = 9$; $x = 3$ **No** 4) $x + 5 = \frac{x + 3}{3}$; $x = -6$ **Sí**

(2) Resuelva $\frac{x - 1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2x + 4}{10}$ $x = 4$

(3) En un corral hay conejos y gallos. Se sabe que hay 13 cabezas y 36 patas. ¿Cuántos conejos y cuántos gallos hay en el corral?

Si hay x conejos PO: $4x + 2(13 - x) = 36$, $x = 5$ R: Hay 5 conejos y 8 gallos

(4) El largo de un rectángulo mide el triple del ancho más 5 cm. Si el perímetro del rectángulo es 42 cm, ¿cuál es la medida del ancho?

Si el ancho mide x cm PO: $2((3x + 5) + x) = 42$; $x = 4$ R: El ancho mide 4 cm

Unidad 4

Razón, proporcionalidad y por ciento

(25 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan el concepto de razón entre dos números.
- Desarrollan el concepto de proporcionalidad.
- Distinguen entre proporcionalidad directa e indirecta.
- Resuelven problemas que involucran proporcionalidad aplicando la regla de tres.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Razón, proporcionalidad y por ciento
- Razones y proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad
- Tanto por ciento

→

Octavo grado

Tanto por ciento
- Tanto por ciento mayor que 100 y menor que 1
- Conversión entre tanto por ciento y fracciones

→

Noveno grado

Interés
- Interés simple
- Interés compuesto

3 Plan de estudio (24 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Razones y proporciones (4 horas)	1/4	• Razón y razón inversa
	2/4	• Razones iguales y razón en su mínima expresión
	3/4	• Proporción, términos de una proporción y propiedad fundamental de las proporciones
	4/4	• Aplicación de la proporción
2. Proporcionalidad directa (9 horas)	1~2/9	• Proporcionalidad directa
	3/9	• Constante de proporcionalidad
	4/9	• Fórmula para expresar la proporcionalidad directa.
	5/9	• Resolver problemas utilizando la proporcionalidad directa
	6~9/9	• Gráfica de proporcionalidad directa
3. Proporcionalidad inversa (5 Horas)	1/5	• Proporcionalidad inversa
	2~3/5	• Constante de proporcionalidad inversa y fórmula para expresar la proporcionalidad inversa.
	4~5/5	• Representación gráfica de proporcionalidad inversa.

4. Aplicación de la proporcionalidad (2 horas)	1~2/2	• Aplicación de la proporcionalidad
5. Tanto por ciento (3 horas)	1/3	• Cálculo del por ciento dado un número y su total
	2/3	• Cálculo del tanto por ciento de un número
	3/3	• Cálculo del total dado un número y su por ciento
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	
Evaluación	No hay horas	

4 Puntos de lección

Lección 1: Razones y proporciones

La razón de dos números a y b (diferentes de cero y en ese orden) es el cociente $\frac{a}{b}$, es decir, la razón y el cociente tienen el mismo significado. Al número a se le llama antecedente y al b consecuente.

La razón entre los números a y b se puede expresar en la forma a:b y se lee "a es a b". Esta forma es importante cuando se quiere mostrar más claramente la relación entre esas dos cantidades y además tiene la ventaja de expresar la relación con números naturales.

En la vida diaria existe una serie de razones muy importantes; como ser:

1) Velocidad: es la razón entre la distancia y el tiempo ($V = \frac{d}{t}$).
2) Presión: es la razón entre el peso y el área ($P = \frac{p}{a}$).
3) Aceleración: es la razón entre la velocidad y el tiempo ($A = \frac{v}{t}$).

La razón inversa de la razón $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, es decir la recíproca de $\frac{a}{b}$. Este concepto es muy importante para resolver ejercicios de proporcionalidad inversa.

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Así, 2:3::4:6 es una proporción y se lee "2 es a 3 como 4 es a 6". A los números 2 y 6 se les llama extremos y a 3 y 4 medios.

Hay dos formas de saber si una expresión es una proporción o no:

1 comparar las dos razones como cocientes y

2 convertir una razón en la otra multiplicando los dos términos de ésta por un número diferente de cero.

Para esta última forma, se da que una razón no cambia cuando ambos términos se multiplican por un mismo número diferente de cero, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$; donde $n \neq 0$.

Por lo general las razones se expresan en su forma simplificada, es decir, ambos términos no tienen factores comunes. Por ejemplo, en lugar de 20:28 se utiliza 5:7.

Para resolver problemas con razones se aplica la propiedad fundamental de las proporciones la cual expresa que en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios, es decir, si a:b : : c:d es una proporción se da que $ad = bc$. Lo anterior es cierto porque a:b :: c:d equivale a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y multiplicando los dos miembros por bd se obtiene $ad = bc$ y este proceso es reversible.

Ejemplo: Para encontrar el valor de x en la proporción 12:15 :: 4:x se obtiene:

1 el producto de los extremos: 12x

2 el producto de los medios: 15 x 4 = 60

3 la igualdad de ambos productos: 12x = 60, de la cual se deduce que $x = \frac{60}{12} = 5$

Lección 2: Proporcionalidad directa

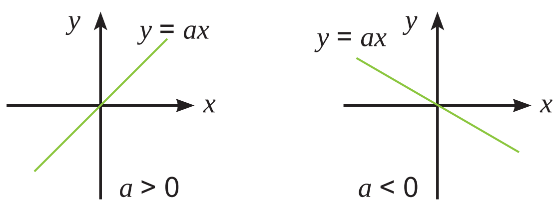
Se dice que dos cantidades x y y son directamente proporcionales cuando se verifica la relación $y = ax$ donde al número a se le llama constante de proporcionalidad y representa la cantidad por unidad, es decir, la cantidad y que corresponde a una unidad de la cantidad x. Lo importante es comprender que la cantidad y cambia a medida cambia la cantidad x. La cantidad x es directamente proporcional a la cantidad y si a medida que x aumenta también lo hace y o si x decrece y también decrece.

Por ejemplo, si x es la cantidad de agua y y es la profundidad; a mayor cantidad de agua mayor profundidad (Ejemplo **A** (1) del LE).

Para profundizar el concepto de proporcionalidad directa se sigue el siguiente orden:

1. Cuando la cantidad x es multiplicada por 2, 3, … la cantidad y es multiplicada por 2, 3, … Esto también es válido cuando el multiplicador es una fracción.
2. El cociente $\frac{y}{x}$ no cambia, es decir, es constante.
3. $y = ax$
4. Las variables x y y pueden ser números negativos.

La gráfica de una proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen.



Esta gráfica es muy útil para entender intuitivamente la relación entre las dos cantidades y saber si son directamente proporcionales o no. Para trazarla se colocan los puntos que corresponden a los valores de la tabla y después agregando más puntos se determinará la recta y si se ubican todos los puntos se formará la recta completa.

Cuando se comprende que la gráfica es una recta basta con ubicar dos puntos: el origen (0,0) y otro punto cualquiera, para después trazar la recta que une estos puntos. Para mayor exactitud se recomienda que este otro punto no esté tan cerca del origen.

Lección 3: Proporcionalidad inversa

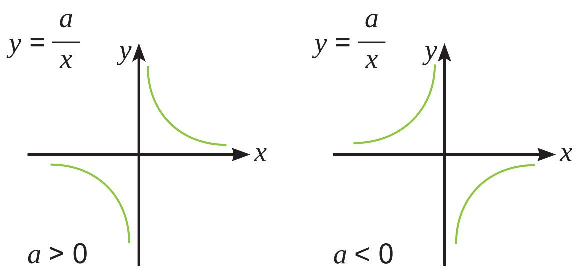
Se dice que dos cantidades x y y son inversamente proporcionales cuando se verifica la relación $y = \frac{a}{x}$; donde a es una constante de proporcionalidad.

La cantidad x es inversamente proporcional a y si a medida que x aumenta y decrece o viceversa. Por ejemplo, si x (cm) es la longitud del lado vertical y y (cm) es la longitud del lado horizontal de un rectángulo cuya área es 12 cm^2, entonces si x aumenta y disminuye y viceversa (Ejemplo **A** (1) del LE). Otro ejemplo de proporcionalidad inversa es el siguiente: si x es la cantidad de agua y y es el tiempo que tarda en llenarse un recipiente, entonces si cae mayor cantidad de agua en menos tiem- po se llenará el recipiente.

El concepto de la proporcionalidad inversa se introduce en el siguiente orden:

1. Cuando la cantidad x es multiplicada por 2, 3,… la cantidad y es multiplicada por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,… (Si el multiplicador es una fracción y se multiplica por la inversa de la fracción).
2. El producto xy no cambia, es decir, es constante.
3. $y = \frac{a}{x}$.
4. Las variables x y y pueden ser números negativos.

La gráfica de una proporcionalidad inversa es una curva llamada hipérbola. En ésta las curvas se acercan sin límite a los ejes coordenados.



Lección 4: Aplicación de la proporcionalidad

En el ejemplo **A**, el peso y el área de figuras hechas de cartón son directamente proporcionales por lo tanto se puede aplicar la fórmula $y = ax$ donde a es constante. Por otra parte, se puede resolver usando el concepto de la cantidad por unidad calculando la constante $a = y/x$. También se puede resolver usando las proporciones, es decir, estableciendo la relación entre las dos razones.

Para esta última forma de cálculo generalmente se elabora una tabla como la siguiente:

Área (cm^2)	Peso (g)
900	45
x	30

De esta tabla se forma la siguiente proporción 900: x :: 45:30 y se calcula:

- el producto de los extremos: 900 x 30 = 27000
- el producto de los medios: $45x$
- la igualdad de ambos productos: $45x = 27000$, de la cual se deduce que $x = \frac{27000}{45} = 600$

Con esta forma debe entenderse muy bien el ejercicio para poder ubicar la cantidad desconocida x.

En el ejemplo **C** la relación entre las variables es inversamente proporcional pues a más dientes del engranaje menos revoluciones o a menos dientes más revoluciones.

Además fijándose en el hecho que la cantidad de dientes de los engranajes que pasan por el punto donde los dos engranajes se unen es igual, se sabe que el producto de la cantidad de dientes por la cantidad de revoluciones es igual en los dos engranajes.

También se pueden usar las proporciones, pero con el cuidado de invertir una de las razones (Concepto de la razón inversa) y luego encontrar x utilizando la propiedad fundamental de las proporciones.

Lección 5: Tanto por ciento

El por ciento es la razón de un número a cien. Por ejemplo:

0.25 = 0.25:1 = 25:100 = 25%, por tanto 0.25 = 25%. La ventaja de usar el por ciento es que se puede expresar una razón (aproximada) con un número entero. Para aplicar este concepto en varias situaciones hay que dominar lo siguiente:

1. Dados a y b encontrar c, es decir, $c = a \div b$ (Ejemplo **A**).
2. Dados b y c encontrar a, es decir, $a = b \times c$ (Ejemplo **B**).
3. Dados a y c encontrar b, es decir, $b = a \div c$ (Ejemplo **C**).

Desarrollo de clases

1. Comentar lo observado en el dibujo y contestar la pregunta. [A1]

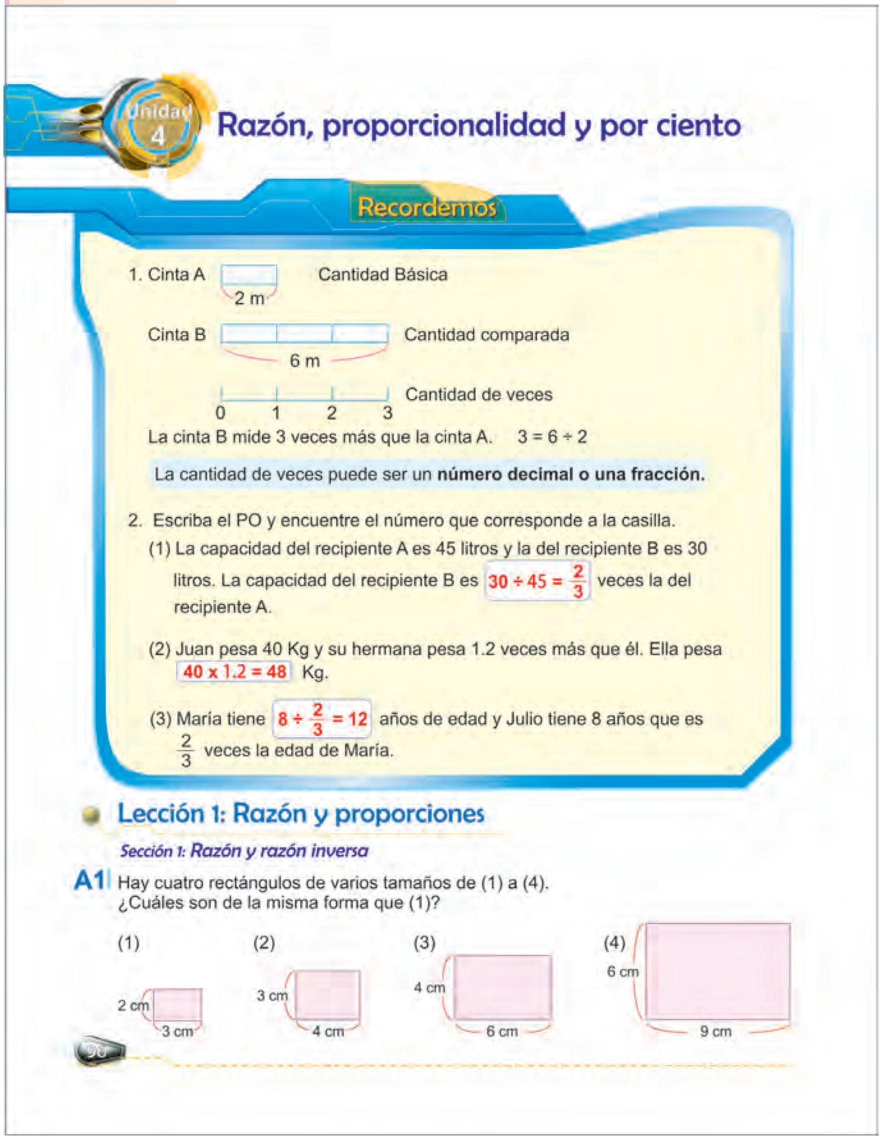
* Aprovechando los comentarios hacer que expliquen por qué algunos de esos rectángulos son de la misma forma que (1).

Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (1/4) **Razones y proporciones**

Objetivo:
- Encontrar la razón entre dos cantidades.
- Conocer los términos de una razón.
- Encontrar la razón inversa de una razón.

Materiales:


Unidad 4 Razón, proporcionalidad y por ciento

Recordemos

1. Cinta A — 2 m — Cantidad Básica

Cinta B — 6 m — Cantidad comparada

0 1 2 3 — Cantidad de veces

La cinta B mide 3 veces más que la cinta A. 3 = 6 ÷ 2

La cantidad de veces puede ser un **número decimal o una fracción.**

2. Escriba el PO y encuentre el número que corresponde a la casilla.

(1) La capacidad del recipiente A es 45 litros y la del recipiente B es 30 litros. La capacidad del recipiente B es $30 \div 45 = \frac{2}{3}$ veces la del recipiente A.

(2) Juan pesa 40 Kg y su hermana pesa 1.2 veces más que él. Ella pesa $40 \times 1.2 = 48$ Kg.

(3) María tiene $8 \div \frac{2}{3} = 12$ años de edad y Julio tiene 8 años que es $\frac{2}{3}$ veces la edad de María.

Lección 1: Razón y proporciones

Sección 1: Razón y razón inversa

A1 Hay cuatro rectángulos de varios tamaños de (1) a (4). ¿Cuáles son de la misma forma que (1)?

Lección 1: (1/4)

Razones y proporciones

[Continuación]

2 Llene el cuadro con el valor del cociente entre el largo y el ancho.

Rectángulo	1	2	3	4
Cociente	$\frac{3}{2}$			

✓

Rectángulo	1	2	3	4
Cociente	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

R: Los rectángulos (3) y (4) son de la misma forma que (1).

Sean a y b dos números diferentes de 0, al cociente $\frac{a}{b}$ se le llama **razón**.
Esta razón también puede escribirse como $a{:}b$ y se lee ***a*** es a ***b***.
Al número a se le llama **antecedente** y al número b **consecuente**.
Los términos de una razón son dos: antecedente y consecuente.

La relación numérica de la medida de los lados del rectángulo (1) se representa como $\frac{3}{2}$. Esta misma relación se puede representar como 3:2 lo cual significa que la razón entre el largo y el ancho del rectángulo es de 3 a 2.

Ejemplo: La razón de 3 y 4 es 3:4 ó $\frac{3}{4}$

1 Exprese las siguientes razones en forma de fracción.
(1) 3:5 $\frac{3}{5}$ (2) 6:4 $\frac{3}{2}$ (3) 7:8 $\frac{7}{8}$

B1 Encuentre la razón entre el ancho y el largo de cada uno de los rectángulos de **A**.

Rectángulo	1	2	3	4
Razón	$\frac{2}{3}$			

✓

Rectángulo	1	2	3	4
Razón	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

La **razón inversa** de la razón $a{:}b$ es $b{:}a$.

Ejemplo: La razón inversa de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$ ó 3:2

2 Encuentre la razón inversa de las siguientes razones.
(1) 5:3 (2) $\frac{3}{7}$ (3) $\frac{8}{5}$ (4) 7:12

✓ (1) 3:5 ó $\frac{3}{5}$ (2) 7:3 ó $\frac{7}{3}$ (3) $\frac{5}{8}$ ó 5:8 (4) 12:7 ó $\frac{12}{7}$

2 Encuentre la razón inversa de las siguientes razones.
(1) $\frac{4}{7}$ (2) 5:4 (3) 3:10 (4) $\frac{11}{12}$
7:4 ó $\frac{7}{4}$ 4:5 ó $\frac{4}{5}$ 10:3 ó $\frac{10}{3}$ 12:11 ó $\frac{12}{11}$

... viene de la página anterior

2. **Encontrar el cociente entre el largo y el ancho [A2].**
   * Indicar que llenen la tabla y observen los cocientes.
   * Concluir que los rectángulos (3) y (4) son de la misma forma que (1) porque el cociente entre el largo y el ancho es igual para todos.
3. **Llamar razón a este tipo de relación entre dos cantidades.**
   * Indicar que una razón tiene dos términos y éstos deben ser distintos de cero.
   * Indicar las diferentes formas de escribir una razón.
4. **Resolver 1.**
5. **Encontrar la razón entre el ancho y el largo del rectángulo. [B1]**
   * Indicar que llenen la tabla y observen los cocientes.
6. **Llamar razón inversa a este tipo de razón.**
   * Indicar que comparen los términos de la razón con los términos de su razón inversa.
   * Indicar que la razón inversa de una razón es la fracción recíproca de una fracción.
7. **Encontrar la razón inversa de varias razones. [B2]**
8. **Resolver 2.**

1. **Pensar en la forma de encontrar las razones iguales. [C]**

M: ¿Cómo podemos saber cuáles razones son iguales?

RP: Calculando el cociente, multiplicando ambos términos por un mismo número, etc.

* Determinar los diferentes grupos de razones.

* Concluir que las razones iguales se obtienen multiplicando ambos términos de una razón por un mismo número.

2. **Conocer la propiedad $a{:}b = an{:}bn$.**

* Concluir que una razón no cambia si se multiplican ambos términos por un mismo número.

* Concluir que esta propiedad exige que el número por el cual se multiplica sea distinto de cero.

3. **Conocer la representación gráfica de la igualdad de las razones: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$.**

4. **Resolver 3.**

5. **Llamar mínima expresión de una razón a la razón cuyos términos son números naturales lo más pequeños posibles.**

6. **Encontrar la mínima expresión de una razón. [D]**

M: ¿Qué se puede hacer para encontrar la mínima expresión de una razón?

RP: Dividir por un mismo número, simplificar como si fueran fracciones, etc.

* Concluir que en algunos casos ambos términos de la razón se dividen o se multiplican por un mismo número natural.

Lección 1: (2/4) Razones y proporciones

Objetivo:

- Encontrar razones iguales comparando sus cocientes.
- Aplicar la propiedad $a{:}b = an{:}bn$ (multiplicar ambos términos de una razón por un mismo número).
- Expresar una razón en su mínima expresión.

Materiales:

Sección 2: Razones iguales y razón en su mínima expresión

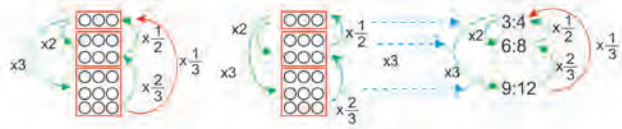
C Agrupe las siguientes razones según la igualdad entre ellas.
3:4, 15:6, 12:20, 10:4, 9:12, 3:5, 6:8, 12:16, 5:2, 9:15, 20:8, 6:10
¿Qué observa?

Primer grupo: 3:4 = 6:8 = 9:12 = 12:16
Segundo grupo: 5:2 = 10:4 = 15:6 = 20:8
Tercer grupo: 3:5 = 6:10 = 9:15 = 12:20

Se observa que en los tres grupos se obtienen las razones iguales multiplicando ambos términos de la primera razón por 2, 3 y 4.

Una razón no cambia si sus dos términos se multiplican por un mismo número diferente de 0, es decir, $a{:}b = an{:}bn$ donde n es diferente de 0.

Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$



3 Escriba tres razones que sean iguales a $\frac{10}{6}$. $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{20}{12}$

En una razón escrita en su mínima expresión ambos términos son números naturales lo más pequeños posible.

D Encuentre la razón en su mínima expresión de modo que sus términos sean números naturales.
(1) 20:28 (2) 1.2:0.8 (3) $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}$ (4) 75:15 (5) 0.2:3

(1) 20:28 = (20 ÷ 4) : (28 ÷ 4) = 5:7
(2) 1.2:0.8 = (1.2 x 10) : (0.8 x 10) = 12:8 = 3:2
(3) $\frac{5}{6}:\frac{3}{4} = (\frac{5}{6} \times 12) : (\frac{3}{4} \times 12) = 10{:}9$ .... Se multiplica por el mcm. de los denominadores.
(4) 75:15 = (75 ÷ 15) : (15 ÷ 15) = 5:1
(5) 0.2:3 = (0.2 x 10) : (3 x 10) = 2:30 = 1:15

4 Encuentre la razón en su mínima expresión.

(1) 8.6:0.6 (2) 81:27 (3) $\frac{2}{3}:\frac{3}{2}$ (4) $\frac{5}{4}:\frac{1}{2}$ (5) 24:32 (6) 2.5:4
43:3 3:1 4:9 5:2 3:4 5:8

7. **Resolver 4.**

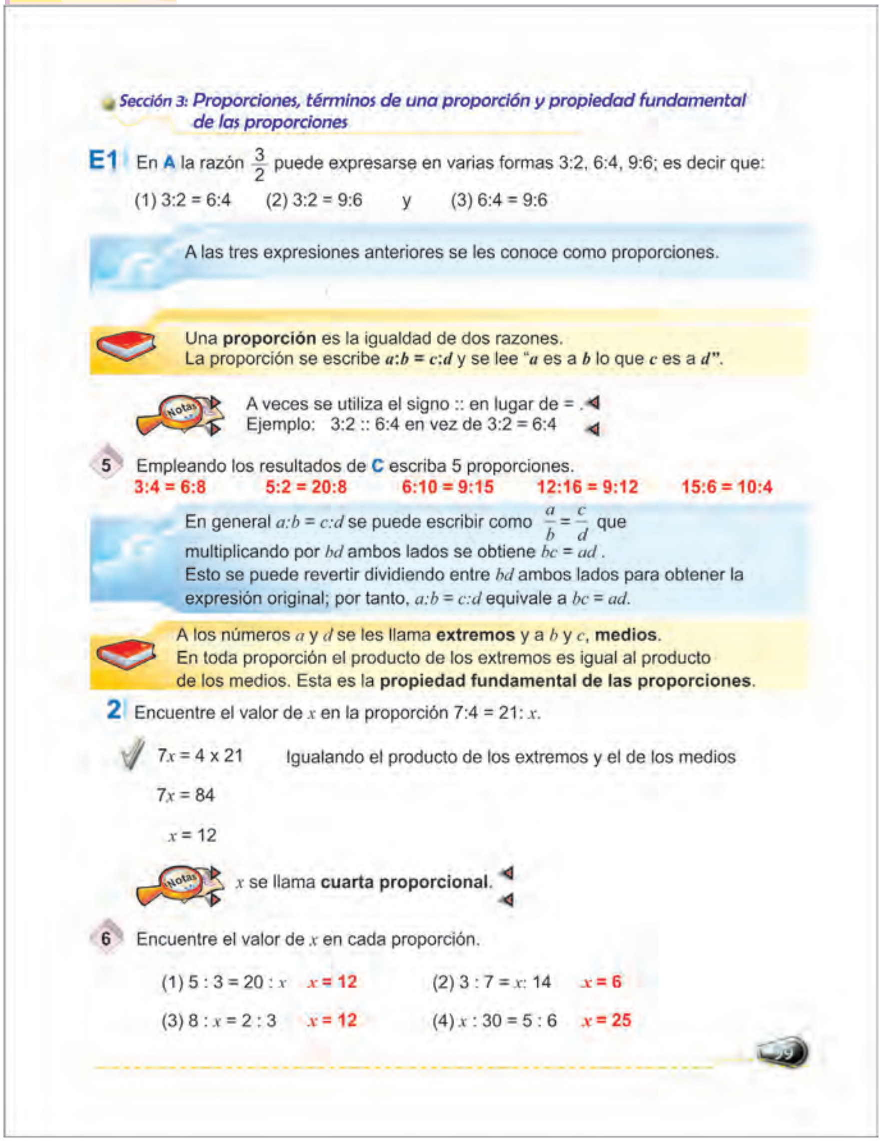
* Hay que tener en cuenta que cuando dividimos entre 2 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Lección 1: (3/4)

Razones y proporciones

Objetivo:
- Identificar proporciones.
- Conocer los términos de una proporción.
- Encontrar el valor de la cuarta proporcional aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

Materiales:



Sección 3: Proporciones, términos de una proporción y propiedad fundamental de las proporciones

E1 En **A** la razón $\frac{3}{2}$ puede expresarse en varias formas 3:2, 6:4, 9:6; es decir que:

(1) 3:2 = 6:4 (2) 3:2 = 9:6 y (3) 6:4 = 9:6

A las tres expresiones anteriores se les conoce como proporciones.

Una **proporción** es la igualdad de dos razones.
La proporción se escribe $a:b = c:d$ y se lee "a es a b lo que c es a d".

Notas: A veces se utiliza el signo :: en lugar de = .
Ejemplo: 3:2 :: 6:4 en vez de 3:2 = 6:4

5 Empleando los resultados de **C** escriba 5 proporciones.
3:4 = 6:8 5:2 = 20:8 6:10 = 9:15 12:16 = 9:12 15:6 = 10:4

En general $a:b = c:d$ se puede escribir como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ que multiplicando por bd ambos lados se obtiene $bc = ad$.
Esto se puede revertir dividiendo entre bd ambos lados para obtener la expresión original; por tanto, $a:b = c:d$ equivale a $bc = ad$.

A los números a y d se les llama **extremos** y a b y c, **medios**.
En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Esta es la **propiedad fundamental de las proporciones**.

2 Encuentre el valor de x en la proporción 7:4 = 21: x.

$7x = 4 \times 21$ Igualando el producto de los extremos y el de los medios

$7x = 84$

$x = 12$

Notas: x se llama **cuarta proporcional**.

6 Encuentre el valor de x en cada proporción.

(1) $5 : 3 = 20 : x$ $x = 12$ (2) $3 : 7 = x : 14$ $x = 6$

(3) $8 : x = 2 : 3$ $x = 12$ (4) $x : 30 = 5 : 6$ $x = 25$

1. **Pensar en las distintas formas de expresar la razón $\frac{3}{2}$. [E1]**

M: Cómo podemos expresar la razón $\frac{3}{2}$ utilizando otras razones?

RP: Escribiendo razones iguales, multiplicando ambos términos por un mismo número natural, etc.

2. **Llamar proporción a la igualdad de dos razones.**

* Concluir que una proporción se puede escribir de distintas formas pero que significan lo mismo.

* Hacer énfasis en la lectura de las proporciones.

3. **Resolver 5.**

4. **Conocer los términos y la propiedad fundamental de las proporciones.**

* Concluir que en una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

5. **Encontrar el valor de la cuarta proporcional. [E2]**

* Llamar al término desconocido (x) cuarta proporcional.

* Encontrar el valor de x utilizando la propiedad fundamental de las proporciones.

6. **Resolver 6.**

1. **Resolver el problema utilizando las proporciones. [F1]**

* Cerciórarse que los estudiantes hayan comprendido el problema. Hacer preguntas como las siguientes: ¿qué forma tiene la bandera?, ¿cuál es la razón de la medida del ancho al largo?, ¿cuánto mide el ancho?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué podemos hacer para resolver este problema?
* Pedir que hagan una representación gráfica del problema.
* Llamar x al dato que se quiere encontrar (la medida del largo de la bandera).
* Escribir el problema como una proporción.
* Utilizar lo que saben sobre la cuarta proporcional para encontrar el valor de x.
* Responder a la pregunta del problema.

2. **Resolver [F2].**

* Este problema debe desarrollarse en forma semejante a como se desarrolló el problema anterior.
* Supervisar el trabajo individual de los estudiantes.

3. **Resolver 7.**

Lección 1: (4/4)

Razones y proporciones

Objetivo: • Resolver problemas utilizando proporciones.

Materiales:

Sección 4: Aplicación de la proporción

F1 La bandera de las Naciones Unidas tiene la forma de un rectángulo. La razón de la medida del ancho a la del largo es 2:3. Si el ancho mide 36 cm, ¿cuánto mide el largo?

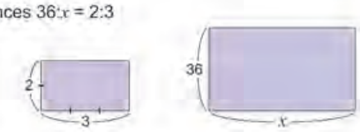
Sea x cm el largo de la bandera entonces $36:x = 2:3$

$2x = 36 \times 3$

$2x = 108$

$x = \frac{108}{2}$

$x = 54$ R: 54 cm



2 El aire se compone principalmente de Nitrogeno (N) y Oxigeno (O), contiene también un bajo porcentaje de otros gases. La razón del volumen de N al de O en el aire es de aproximadamente 4 a 1. ¿Cuántos ℓ de N hay en 20 ℓ de aire?

N N N N O

El volumen de N es $\frac{4}{5}$ veces el del aire, por tanto $20 \times \frac{4}{5} = 16$

R: Aproximadamente 16 ℓ de N.

Otra solución: Sea x la cantidad de ℓ de N, el volumen de O es $(20 - x)$ ℓ.

Por lo tanto, $x : (20 - x) = 4:1$

$4(20 - x) = 1 \times x$

$80 - 4x = x$

$5x = 80$

$x = \frac{80}{5}$

$x = 16$ R: Aproximadamente 16 ℓ de N.

7 Resuelve.

(1) Un campesino se tarda 5 días en sembrar 2 manzanas de milpa (maíz). ¿Cuántos días se tarda en sembrar 6 manzanas?

se omite el proceso de la solución R: 15 días

(2) Un campesino riega un área de 48 m² por bomba (de mochila). ¿Cuántas bombas necesita para regar 240 m²?

se omite el proceso de la solución R: Necesita 5 bombas

(3) Se utilizan 3 toronjas para hacer 0.6 ℓ de jugo. ¿Cuántas toronjas se necesitan para hacer 30 ℓ de jugo?

se omite el proceso de la solución R: se necesitan 150 toronjas

Lección 2: (1~2/9) Proporcionalidad directa

Objetivo: • Identificar situaciones de proporcionalidad directa.

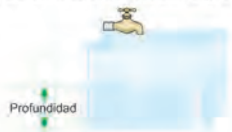
Materiales:

Lección 2: Proporcionalidad

Sección 1: Proporcionalidad directa

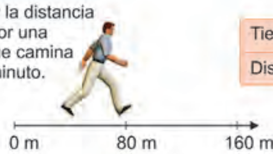
A Observe la relación de las dos cantidades en cada uno de los siguientes casos.

(1) La cantidad de agua y la profundidad del agua en el recipiente.



Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4	5	6
Profundidad (cm)	5	10	15	20	25	30

(2) El tiempo y la distancia recorrida por una persona que camina 80 m por minuto.



Tiempo (min)	1	2	3
Distancia recorrida (m)	80	160	240

(3) La medida de un lado de un cuadrado y su área.

1 cm, 1 cm², 1 cm — 2 cm, 4 cm², 2 cm

Lado (cm)	1	2	3
Área (cm²)	1	4	9

(4) La medida de los lados de los rectángulos cuya área es 12 cm².

1 cm, 12 cm², 12 cm — 2 cm, 12 cm², 6 cm — 3 cm, 12 cm², 4 cm

Lado vertical (cm)	1	2	3
Lado horizontal (cm)	12	6	4

(5) La edad de una madre y su hijo que tienen la misma fecha de cumpleaños.

Edad de la madre (años)	23	24	25
Edad del hijo (años)	0	1	2

(6) El peso de un bloque de azúcar consumido y el peso de lo que sobra.



Consumo (g)	0	10	20
Sobrante (g)	400	390	380

101

1. **Comentar lo observado en el problema. [A(1)]**

* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen las dos cantidades y la relación entre ellas.
* Cerciorarse que identifican las cantidades con sus respectivas unidades.
* Cerciorarse que hagan uso de la representación gráfica del problema (dibujos y tablas) para una mejor compresión del mismo.

2. **Comentar lo observado en los problemas. [A(2)-(6)]**

* Analizar estos problemas en forma similar a lo desarrollado en el inciso anterior.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

3. Investigar en forma específica la relación de las cantidades del caso (1) de A. [B]

M: ¿Cuál es la relación que existe entre la cantidad de agua y la profundidad?

RP: La cantidad de agua aumenta de 1 en 1 y la profundidad de 5 en 5, ambas aumentan, una aumenta más que la otra, etc.

M: ¿Qué sucede con la profundidad cuando la cantidad de agua se multiplica por 2, 3,…?

RP: La profundidad también se multiplica por 2, 3,… respectivamente, etc.

4. Determinar que si una de las cantidades se multiplica por 2, 3,… la otra cantidad también se multiplica por 2, 3, …

* Analizar la representación gráfica utilizando la tabla y la multiplicación.
* Concluir que cuando una aumenta dos, tres,… veces más, la otra también aumenta dos, tres,… veces más.

5. Llamar proporcionalidad directa a este tipo de relación entre dos cantidades.

* Cerciorarse que la proporción anterior es directa.

6. Resolver 1.

[Hasta aquí 1~2/9]

[Desde aquí 3/9]

1. Investigar en forma más específica la relación de las cantidades del caso (1) de A. [C]

M: Analizar el caso (1) de A estableciendo ahora una relación entre las cantidades mayores y las cantidades menores, ¿cuál es la relación que existe entre la cantidad de agua y la profundidad?

RP: La cantidad de agua disminuye de 1 en 1 y la profundidad de 5 en 5, ambas disminuyen, una disminuye más que la otra, etc.

Lección 2: (1~2/9)

Proporcionalidad directa

[Continuación]

Objetivo: (3/9)
- Encontrar la constante de proporcionalidad.
- Encontrar en las proporciones directas la constante de proporcionalidad.

Materiales:

B Investigue más detalladamente la relación de dos cantidades en el caso (1) de A.

Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4	5	6
Profundidad (cm)	5	10	15	20	25	30

Cuando la cantidad de agua aumenta dos, tres, … veces más, la profundidad también aumenta dos, tres… veces más.

x2, x3, x4, x2

Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4	5	6
Profundidad (cm)	5	10	15	20	25	30

x2, x3, x4, x2

Si dos cantidades x y y se relacionan de tal forma que si la cantidad y aumenta 2, 3 … veces más a medida que la cantidad x aumenta 2, 3, … veces más, se dice que x y y son **directamente proporcionales**.

Ejemplo: En A (1) la cantidad de agua y la profundidad son directamente proporcionales.

1 En A encuentre los casos donde las dos cantidades son directamente proporcionales. (1) y (2)

Sección 2: Constante de Proporcionalidad

C En A (1) cuando la cantidad de agua disminuye $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ veces. ¿Cómo cambia la profundidad?

x $\frac{1}{3}$, x $\frac{1}{2}$

Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4	5	6
Profundidad (cm)	5	10	15	20	25	30

x $\frac{1}{3}$, x $\frac{1}{2}$

R: La profundidad disminuye $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ veces respectivamente.

M: Si la cantidad de agua es 6 dℓ y la profundidad 30 cm ¿por cuáles números hay que multiplicar para obtener 3 dℓ y 15 cm respectiva mente?, ¿y para obtener 2 dℓ y 10 cm?

RP: Hay que multiplicar por $\frac{1}{2}$, hay que dividir por 2, etc.

* Es probable que los estudiantes identifiquen más fácilmente la división entre 2 y no la multiplicación por $\frac{1}{2}$.
* Concluir que la profundidad disminuye $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ veces.

Continúa en la siguiente página......

Lección 2: (3/9)

Proporcionalidad directa

[Continuación]

Objetivo: (4/9)

• Expresar la relación de proporcionalidad directa mediante la fórmula $y = ax$.

Materiales:

D En **A** (1) calcule el cociente $\frac{profundidad}{cantidad}$, ¿qué observa?

Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4	5	6
Profundidad (cm)	5	10	15	20	25	30
Profundidad / Cantidad						

Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4	5	6
Profundidad (cm)	5	10	15	20	25	30
Profundidad / Cantidad	$\frac{5}{1} = 5$	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{15}{3} = 5$	$\frac{20}{4} = 5$	$\frac{25}{5} = 5$	$\frac{30}{6} = 5$

R: Todos son iguales a 5.

Cuando las dos cantidades x y y son directamente proporcionales, el cociente y/x; $(x \neq 0)$ no cambia. A esta cantidad se le llama **constante de proporcionalidad.**

Ejemplo: En **A** (1) la constante de proporcionalidad es 5.

2 Encuentre la constante de proporcionalidad en los casos de **A** donde las dos cantidades, la de arriba x y la de abajo y, son directamente proporcionales.

(1) $\frac{y}{x} = \frac{20}{4} = 5$ (2) $\frac{160}{2} = 80$

Sección 3: Fórmulas para expresar la proporcionalidad directa

Si se expresa la constante de proporcionalidad con la letra a se obtiene $a = y/x$. Esta relación se puede expresar mediante la fórmula $y = ax$. Si las cantidades x y y son directamente proporcionales se verifica la relación $y = ax$ donde a es una constante.

Ejemplo: En **A** (1) como $a = 5$ se tiene $y = 5x$.

3 Exprese la relación de las dos cantidades en la forma $y = ax$ en los casos de **A** donde las dos cantidades son directamente proporcionales. **(1) $y = 5x$** **(2) $y = 80x$**

Notas: Los casos **A** (3) $y = x^2$ y **A** (5) $y = x - 23$ no corresponden a la forma $y = ax$.

4 La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de agua y su peso.

Cantidad de agua (dℓ)	1	2	3	4
Peso (g)	100	200	300	400

(1) ¿Las dos cantidades son directamente proporcionales? **Si**

(2) Exprese la relación de la cantidad de agua x (dℓ) y su peso y (g). **$y = 100x$**

(3) ¿Cuánto pesan 8 dℓ de agua? **PO: $y = ax = 100(8) = 800$** **R: 800 g**

103

viene de la página anterior.

2. **Calcular el cociente entre la cantidad y la profundidad. [D]**

* Indicar que llenen la tabla.

M: ¿Cómo son los cocientes que se obtienen?

RP: Iguales, son los mismos, etc.

3. **Llamar constante de proporcionalidad al cociente $\frac{y}{x}$.**

* Concluir que x es distinto de cero, que el cociente $\frac{y}{x}$ no cambia y que la constante de proporcionalidad de **A** (1) es 5.

4. **Resolver 2.**

* Se puede calcular con cualquiera de los valores.

[Hasta aquí 3/9]

[Desde aquí 4/9]

1. **Expresar la relación de proporcionalidad directa mediante la fórmula $y = ax$.**

* Concluir que la constante de proporcionalidad directa "a" se calcula mediante $\frac{y}{x}$ y que las proporciones directas se pueden expresar de la forma $y = ax$.

2. **Resolver 3.**

* Concluir que en **A** (2) se da $y = 80x$, con $a = 80$.

3. **Resolver 4.**

1. **Comentar lo observado en el problema. [E]**

* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen las dos cantidades con sus respectivas unidades y la relación entre ellas.

M: ¿Será este caso de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

RP: Sí, porque al aumentar la cantidad de minutos aumenta la cantidad de metros, etc.

* Indicar que llenen la tabla.

* Cerciorarse que llenen los cuadritos que corresponden a los números por los cuales se multiplica el valor de y.

M: Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3,… ¿Por cuánto es multiplicado el valor de y?

RP: Es multiplicado por 2, 3,…

M: Cuando el valor de x es multiplicado por -2, -3,… ¿Por cuánto es multiplicado el valor de y?

RP: Es multiplicado por -2, -3,…

2. **Encontrar la constante de proporcionalidad.**

* Concluir que el cociente $\frac{y}{x}$ no está definido cuando $x = 0$.

* Concluir que la constante de proporcionalidad es 80 ya sea que los valores de x y y sean positivos o negativos.

3. **Determinar que en las proporciones directas los valores de x y y pueden ser negativos.**

* Concluir que en algunas proporciones directas uno o ambos valores de x y y pueden ser negativos.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (5/9) Proporcionalidad directa

Objetivo: • Resolver problemas utilizando la proporcionalidad directa.

Materiales:

Sección 4: Resolver problemas utilizando proporcionalidad directa

E Una persona camina de Oeste hacia Este a 80 m por minuto. Después de x minutos Desde que pasó por el punto O, está a y metros hacia el Este desde el punto O.

Dos minutos antes de pasar por el punto O, estuvo 160 metros hacia el Oeste desde el punto O, es decir $y = -160$ cuando $x = -2$



(1) Complete la siguiente tabla.

(x4, x3, x2, x(-2))

x (min)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y (m)			-160		0				

(x☐, x☐, x☐, x☐)

(2) Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3, …¿Por cuánto es multiplicado el valor de y?

(3) Cuando el valor de x es multiplicado por -2, -3, ..¿Por cuánto es multiplicado el valor de y?

(4) Encuentre los valores de y/x cuando $x \neq 0$.

(5) Exprese el valor de y en términos de x.

✓ (1)

(x4, x3, x2, x(-2))

x (min)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y (m)	-320	-240	-160	-80	0	80	160	240	320

(x4, x3, x2, x(-2))

(2) Es multiplicado por 2, 3, …
(3) Es multiplicado por -2,-3, …
(4) $\frac{y}{x} = \frac{-320}{-4} = \frac{-160}{-2} = \frac{-80}{-1} = \frac{240}{3} ... = 80$
(5) $y = 80x$.

Se dice que x y y son **directamente proporcionales** cuando se cumple la relación $y = ax$; donde a es una constante, aún cuando uno o ambos de los valores x y y sean negativos.

104

Lección 2: **(5/9)**

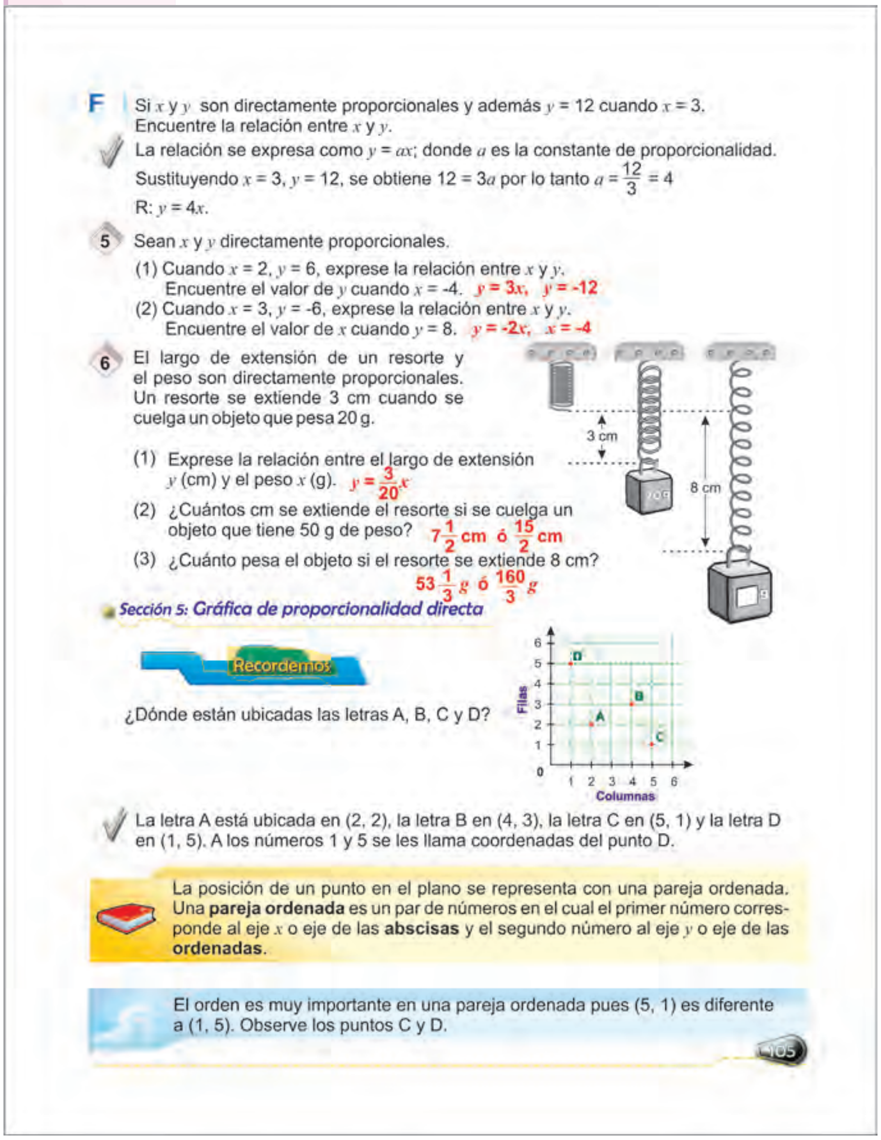
Proporcionalidad directa

[Continuación]

Objetivo: **(6~9/9)**

- Graficar la proporcionalidad directa.

Materiales:



F Si x y y son directamente proporcionales y además $y = 12$ cuando $x = 3$. Encuentre la relación entre x y y.

La relación se expresa como $y = ax$; donde a es la constante de proporcionalidad. Sustituyendo $x = 3$, $y = 12$, se obtiene $12 = 3a$ por lo tanto $a = \frac{12}{3} = 4$

R: $y = 4x$.

5 Sean x y y directamente proporcionales.

(1) Cuando $x = 2$, $y = 6$, exprese la relación entre x y y. Encuentre el valor de y cuando $x = -4$. $y = 3x$, $y = -12$

(2) Cuando $x = 3$, $y = -6$, exprese la relación entre x y y. Encuentre el valor de x cuando $y = 8$. $y = -2x$, $x = -4$

6 El largo de extensión de un resorte y el peso son directamente proporcionales. Un resorte se extiende 3 cm cuando se cuelga un objeto que pesa 20 g.

(1) Exprese la relación entre el largo de extensión y (cm) y el peso x (g). $y = \frac{3}{20}x$

(2) ¿Cuántos cm se extiende el resorte si se cuelga un objeto que tiene 50 g de peso? $7\frac{1}{2}$ cm ó $\frac{15}{2}$ cm

(3) ¿Cuánto pesa el objeto si el resorte se extiende 8 cm? $53\frac{1}{3}$ g ó $\frac{160}{3}$ g

Sección 5: Gráfica de proporcionalidad directa

Recordemos

¿Dónde están ubicadas las letras A, B, C y D?

La letra A está ubicada en (2, 2), la letra B en (4, 3), la letra C en (5, 1) y la letra D en (1, 5). A los números 1 y 5 se les llama coordenadas del punto D.

La posición de un punto en el plano se representa con una pareja ordenada. Una **pareja ordenada** es un par de números en el cual el primer número corresponde al eje x o eje de las **abscisas** y el segundo número al eje y o eje de las **ordenadas**.

El orden es muy importante en una pareja ordenada pues (5, 1) es diferente a (1, 5). Observe los puntos C y D.

105

... viene de la página anterior.

4. **Comentar lo encontrado en el ejercicio. [F]**

* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen las dos variables y sus respectivos valores.

M: Si x y y son directamente proporcionales, ¿cómo se define la constante de proporcionalidad?

RP: $a = \frac{y}{x}$

M: Si sabemos que $y = 12$ cuando $x = 3$ ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?

RP: $a = \frac{y}{x} = \frac{12}{3} = 4$.

M: ¿Cómo se expresa una proporción directa conociendo la constante de proporcionalidad?

RP: Con $y = ax$ y como $a = 4$ entonces la relación se expresa como $y = 4x$.

5. **Resolver 5.**

6. **Resolver 6.**

[Hasta aquí 5/9]

[Desde aquí 6~9/9]

1. **Repasar lo aprendido sobre las parejas ordenadas. [Recordemos]**

* Indicar que en una pareja ordenada el primer número corresponde a las columnas y el segundo a las filas.

* Indicar que en una pareja ordenada el orden es muy importante.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

2. Completar la tabla de $y = 2x$. [G (1)]

M: En $y = 2x$ ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

RP: 2. $a = 2$.

M: ¿Qué hacemos para encontrar los valores de y conociendo los valores de x?

RP: Multiplicar el valor de x por la constante de proporcionalidad, multiplicar los valores de x por 2, etc.

* Cerciorarse que llenen la tabla correctamente.

3. Graficar en el plano cartesiano los puntos de la tabla anterior. [G (2)]

* Indicar que las graduaciones en el plano cartesiano son del mismo tamaño y que se ubican tanto los números positivos como negativos.

* Indicar que los valores de x corresponden al eje x (eje de las abscisas) y que los valores de y corresponden al eje y (eje de las ordenadas).

* Indicar que las coordenadas (x, y) se representan con un punto en el plano.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (6~9/9) Proporcionalidad directa

[Continuación]

G Si la relación de la proporcionalidad directa entre x y y es $y = 2x$.

(1) Complete la tabla que representa los valores de y que corresponden a los valores de x.

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y													

(2) Grafique los puntos cuyas coordenadas x y y tienen el valor de la tabla.

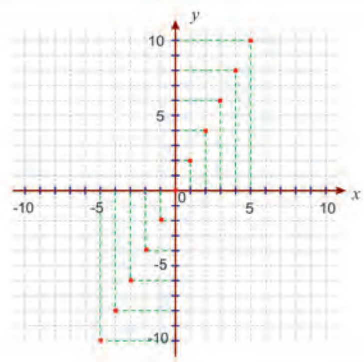


(3) Si se colocan más puntos cuyas coordenadas son los valores de x y y relacionados por $y = 2x$, ¿qué figura aparecerá?

(1)

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	...

(2)



Lección 2: (6~9/9)

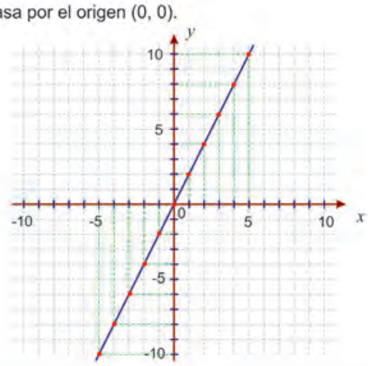
Proporcionalidad directa

[Continuación]

Objetivo:

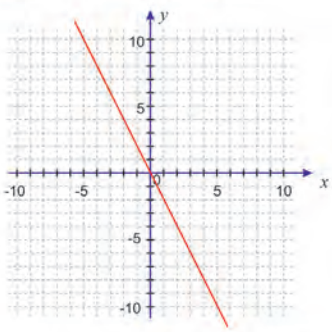
Materiales:

(3) Una recta que pasa por el origen (0, 0).



El conjunto de puntos cuyas coordenadas son las parejas (x, y) que cumplen la relación $y = 2x$ se llama gráfica de $y = 2x$.

7 Dibuje la gráfica de $y = -2x$.



La gráfica de la proporcionalidad directa $y = ax$ es una recta que pasa por el origen.

Como la gráfica de la proporcionalidad directa es una recta, se puede dibujar sólo uniendo dos puntos.

107

... viene de la página anterior.

4. Trazar la gráfica de $y = 2x$. [G (3)]

M: ¿Qué figura aparecerá si se colocan todos los puntos correspondientes a $y = 2x$?

RP: Una línea, una recta, etc.

* Indicar que unan todos los puntos con una recta.
* Concluir que la gráfica de $y = 2x$ es una recta que pasa por el origen (0, 0).

5. Nombrar la recta.

* Indicar que la recta se llama gráfica de $y = 2x$.

6. Resolver 7.

* Indicar que tracen la gráfica siguiendo los pasos de la clase anterior.

7. Concluir que la gráfica de una proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen.

M: ¿La gráfica de $y = 2x$ pasa por el origen? ¿Y la de $y = -2x$?

RP: Sí.

* Concluir que la gráfica de toda proporcionalidad directa es una recta que siempre pasa por el origen.

M: ¿Cuánto es la cantidad mínima de puntos que se necesitan para trazar una recta?

RP: Dos, etc.

* Concluir que para trazar la gráfica de la proporcionalidad directa se necesita sólo dos puntos.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

8. Trazar la gráfica. [H]

M: ¿Cuál será la forma más rápida para trazar la gráfica?

RP: Ubicando un punto y el origen, ubicando dos puntos, etc.

* Indicar que tracen la gráfica determinando un punto y el origen.

9. Resolver 8 .

* Indicar que tracen la gráfica ubicando dos puntos. Pueden determinar un tercer punto para comprobar que la recta trazada es la correcta.

10. Resolver 9 .

* Indicar que pueden encontrar la constante de proporcionalidad observando los líneas punteadas correspondientes a los valores de x y y en la gráfica.
* Concluir que para (1) es $y = 3x$ y para (2) es $y = -4x$.

11. Resolver 10 .

* Indicar que tracen la gráfica siguiendo los pasos de la clase anterior.

Lección 2: (6~9/9)

Proporcionalidad directa

[Continuación]

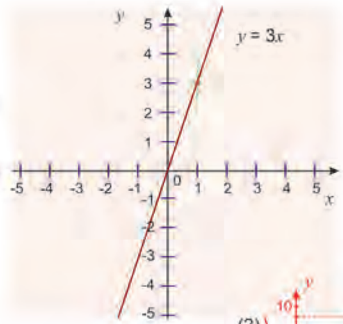
Objetivo:

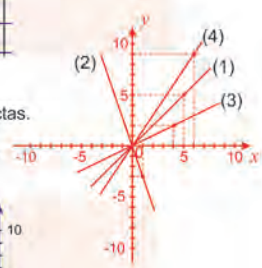
Materiales:

H Dibuje la gráfica de $y = 3x$.

Como se sabe que la gráfica pasa por el origen, basta con encontrar un punto que esté en la gráfica. Se puede usar cualquier valor de x.

Por ejemplo, si se sustituye x por 1, $y = 3$. Se une el punto (1, 3) con el origen.





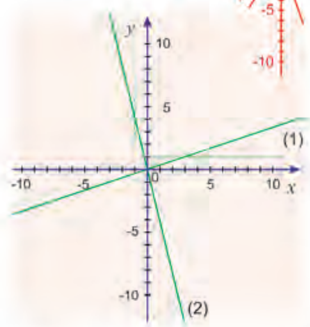
8 Dibuje las gráficas de las siguientes proporcionalidades directas.

(1) $y = x$ (2) $y = -3x$ (3) $y = \frac{1}{2}x$ (4) $y = \frac{3}{2}x$.

9 Las gráficas (1) y (2) son de proporcionalidades directas. Exprese la relación entre las variables en cada caso.

(1) $y = \frac{1}{3}x$

(2) $y = -4x$



10 En cada uno de los siguientes casos las variables son directamente proporcionales, exprese y en términos de x.

(1) La gráfica pasa por el punto (2, 6). $y = 3x$

(2) Cuando el valor de x aumenta por 1, el valor de y aumenta por 4. $y = 4x$

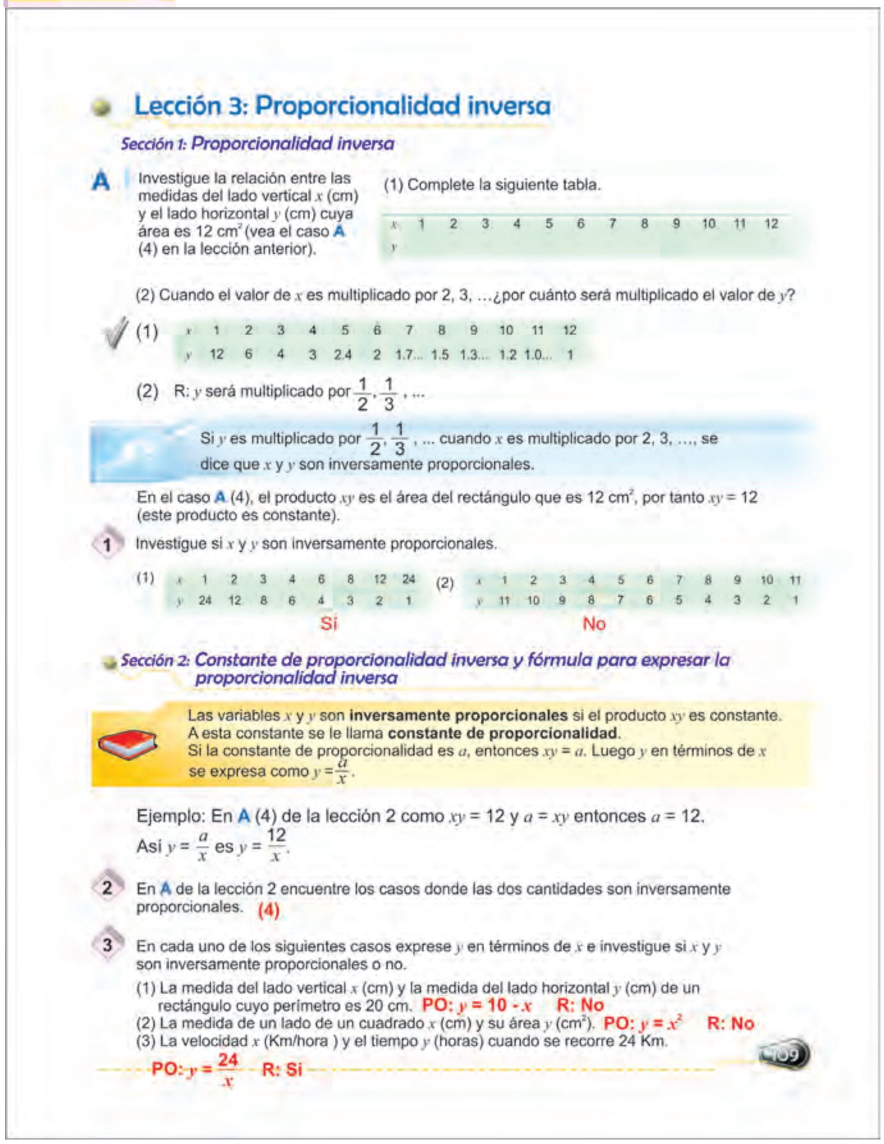
(3) Cuando el valor de x aumenta por 2, el valor de y disminuye por 3. $y = -\frac{3}{2}x$

Lección 3: (1/4)

Proporcionalidad inversa

Objetivo: • Identificar situaciones de proporcionalidad inversa.

Objetivo: (2/4) • Encontrar la constante de proporcionalidad inversa.
• Expresar la relación de proporcionalidad inversa mediante la fórmula $y = \frac{a}{x}$ ó $y = ax$.



Lección 3: Proporcionalidad inversa

Sección 1: Proporcionalidad inversa

A Investigue la relación entre las medidas del lado vertical x (cm) y el lado horizontal y (cm) cuya área es 12 cm^2 (vea el caso **A** (4) en la lección anterior).

(1) Complete la siguiente tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y												

(2) Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3, …¿por cuánto será multiplicado el valor de y?

(1)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	12	6	4	3	2.4	2	1.7...	1.5	1.3...	1.2	1.0...	1

(2) R: y será multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ...

Si y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ... cuando x es multiplicado por 2, 3, ..., se dice que x y y son inversamente proporcionales.

En el caso **A** (4), el producto xy es el área del rectángulo que es 12 cm^2, por tanto $xy = 12$ (este producto es constante).

1 Investigue si x y y son inversamente proporcionales.

(1)

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

Si

(2)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

No

Sección 2: Constante de proporcionalidad inversa y fórmula para expresar la proporcionalidad inversa

Las variables x y y son **inversamente proporcionales** si el producto xy es constante.
A esta constante se le llama **constante de proporcionalidad**.
Si la constante de proporcionalidad es a, entonces $xy = a$. Luego y en términos de x se expresa como $y = \frac{a}{x}$.

Ejemplo: En **A** (4) de la lección 2 como $xy = 12$ y $a = xy$ entonces $a = 12$.
Así $y = \frac{a}{x}$ es $y = \frac{12}{x}$.

2 En **A** de la lección 2 encuentre los casos donde las dos cantidades son inversamente proporcionales. (4)

3 En cada uno de los siguientes casos exprese y en términos de x e investigue si x y y son inversamente proporcionales o no.

(1) La medida del lado vertical x (cm) y la medida del lado horizontal y (cm) de un rectángulo cuyo perímetro es 20 cm. PO: $y = 10 - x$ R: No
(2) La medida de un lado de un cuadrado x (cm) y su área y (cm^2). PO: $y = x^2$ R: No
(3) La velocidad x (Km/hora) y el tiempo y (horas) cuando se recorre 24 Km.
PO: $y = \frac{24}{x}$ R: Si

109

1. **Comentar lo observado en el problema. [A]**
* Identificar las 2 cantidades con sus unidades y su relación.
* Hacer la representación gráfica del problema.
* Concluir que: "el producto de la medida de los lados es 12".
2. **Llenar la tabla [A(1)]**
* A los estudiantes se les facilita encontrar los valores de y cuando x es 1, 2, 3, 4, 6 y 12, y se dificulta cuando x toma los demás valores.

M: Cuando el valor de x (lado vertical) es multiplicado por 2, 3,… ¿Por cuánto es multiplicado el valor de y (lado horizontal)?

RP: Por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,…, es dividido por 2, 3,…

3. **Determinar que si una de las cantidades se multiplica por 2, 3,… la otra cantidad se multiplica por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,…**
* Concluir que cuando una aumenta 2, 3,… veces más la otra disminuye 2, 3,… veces más con los datos de la tabla.
4. **Llamar PI a este tipo de relación entre dos cantidades.**
* Cerciorarse que la proporción anterior es inversa.
5. **Resolver 1.**

[Hasta aquí 1/4]

[Desde aquí 2/4]

1. **Calcular el producto de las variables x y y en A.**

M: ¿Cómo son los productos al multiplicar x por y?

RP: Iguales, son los mismos.

* Concluir que en las PI el producto xy es constante.
2. **Llamar constante de proporcionalidad al producto xy.**

M: Relacionándolo con la proporcionalidad directa, ¿cómo se le puede llamar a este producto constante?

RP: Constante de proporcionalidad.

* Concluir que la constante de proporcionalidad de A (4) es 12.
3. **Expresar la relación de PI mediante la fórmula $y = \frac{a}{x}$.**
* Concluir que la constante de PI "a" se calcula mediante el producto xy y que las PI se pueden expresar de la forma $y = \frac{a}{x}$.
4. **Resolver 2 y 3.**

En 2 sólo (4) de A y en 3 sólo (3) son PI.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

5. Encontrar los valores de y cuando $y = \frac{6}{x}$ y llenar la tabla. [B]

M: ¿Qué hay que hacer para encontrar los valores de y?

RP: Dividir el número 6 entre los valores de x, etc.

* Llenar los valores de y en la tabla.
* Cerciorarse que llenen los cuadritos que corresponden a los números por los cuales se multiplica el valor de y.
* Indicar que comprueben que los productos xy son constantes.
* Concluir que la constante de proporcionalidad es 6 ya sea que los valores de x e y sean positivos o negativos.

6. Determinar que en las proporciones inversas los valores de x y y pueden ser negativos.

* Concluir que en algunas proporciones inversas uno o ambos valores de x y y pueden ser negativos.

7. Expresar la relación de proporcionalidad inversa mediante la fórmula $y = \frac{a}{x}$. [C]

M: ¿Cómo podemos saber el valor de la constante a si $x = 4$ e $y = 5$?

RP: Multiplicándolos, mediante $a = xy$, 4 x 5, etc.

M: ¿Cómo podemos expresar la proporcionalidad inversa en términos de x si $a = 20$?

RP: Como $y = \frac{20}{x}$ ya que $a = 20$.

* Concluir que la constante de proporcionalidad inversa "a" se calcula mediante xy.
* Concluir que las proporciones inversas se pueden expresar de la forma $y = \frac{a}{x}$.

Lección 3: (2/4) Proporcionalidad inversa

[Continuación]

Objetivo: (3/4)

• Graficar la proporcionalidad inversa.

Materiales:

B Complete la siguiente tabla que corresponde a la proporcionalidad inversa $y = \frac{6}{x}$ y escriba los números en las casillas.

x (-3) x3 x2

x	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6
y									

x ☐ x ☐ x ☐

✓

x (-3) x3 x2

x	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6
y	-1	-2	-3	-6	////	6	3	2	1

$\times\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{2}$

C Sean x y y inversamente proporcionales. Cuando $x = 4$, $y = 5$. Exprese y en términos de x.

✓ Como x y y son inversamente proporcionales, $y = \frac{a}{x}$, donde a es la constante de proporcionalidad. Sustituyendo 4 en lugar de x y 5 en lugar de y, se obtiene $5 = \frac{a}{4}$, por tanto $a = 4 \times 5 = 20$. R: $y = \frac{20}{x}$.

4 Una cisterna tarda en llenarse 15 minutos si se echan 4 ℓ de agua por minuto.

(1) Exprese la relación entre la cantidad de agua x (ℓ por min) y el tiempo y (min) que tarda en llenarse.

PO: $y = \frac{60}{x}$

(2) Si se echan 6 ℓ de agua por minuto, ¿cuántos minutos tarda en llenarse la cisterna?

PO: $y = \frac{60}{x} = \frac{60}{6} = 10$ R: 10 minutos

110

8. Resolver 4.

Lección 3: **(4/4)**

Proporcionalidad inversa

Objetivo: **(3/4)**

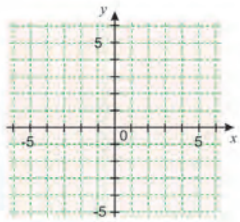
- Profundizar en el estudio de la gráfica de la proporcionalidad inversa.

Materiales:

Sección 3: Gráficos de proporcionalidad inversa

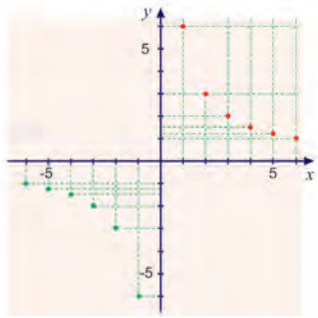
D Complete la siguiente tabla de la relación $y = \frac{6}{x}$ y grafique los puntos correspondientes.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y													

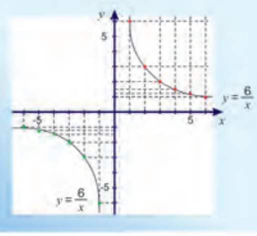


✓

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	-1.2	-1.5	-2	-3	-6	////	6	3	2	1.5	1.2	1



Si se grafican más puntos la gráfica toma la siguiente figura.
A ésta se le llama gráfica de proporcionalidad inversa $y = \frac{6}{x}$.



1. **Completar la tabla de $y = \frac{6}{x}$. [D]**

M: ¿Qué hacemos para encontrar los valores de y conociendo los valores de x?

RP: Dividimos el número 6 entre los valores de x.

* Cerciorarse que llenen la tabla correctamente.

M: Según la tabla, ¿cuál es la constante de proporcionalidad en $y = \frac{6}{x}$?

RP: 6, $a = 6$

2. **Graficar en el plano cartesiano los puntos de la tabla anterior.**

* Indicar que deben tomar en cuenta todas las sugerencias que se dieron cuando se estudio la gráfica de las proporciones directas.

3. **Trazar la gráfica de $y = \frac{6}{x}$.**

M: ¿Qué figura aparecerá si se colocan todos los puntos correspondientes a $y = \frac{6}{x}$?

RP: Una curva, dos curvas, dos líneas parecidas a semicírculo, etc.

* Indicar que unan los dos conjuntos de puntos separadamente con una línea curva.

* Indicar que estas líneas curvas se aproximan a los ejes pero no los tocan.

4. **Nombrar la recta.**

* Indicar que la recta se llama gráfica de $y = \frac{6}{x}$.

Continúa en la siguiente página...

Lección 3: (4/4)

Proporcionalidad inversa

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

... viene de la página anterior.

5. Calcular los diferentes valores de y que corresponden a los distintos valores de x. [E]

* Los estudiantes pueden utilizar la calculadora para realizar estos cálculos.
* Concluir que en (1) y (2) los valores de y se hacen más pequeños y en (3) y (4) más grandes (Aclarar que en (4) es en su valor absoluto).
* Completar la tabla de $y = -\frac{6}{x}$.

6. Graficar $y = -\frac{6}{x}$ en el plano cartesiano.

* Indicar que ubiquen en el plano cartesiano los puntos de la tabla y que tracen la gráfica.
* Indicar que las dos curvas trazadas se llaman gráfica de $y = -\frac{6}{x}$.
* Reflexionar sobre la dirección que sigue la gráfica cuando aumenta o disminuye x y cuando los valores de x se acercan a cero.

7. Llamar hipérbola a la gráfica de una proporción inversa.

* Concluir que la gráfica de la proporcionalidad inversa es una hipérbola.
* Concluir que si la constante de proporcionalidad "a" es mayor que cero la gráfica tiene la forma de $y = \frac{6}{x}$ y si es menor que cero tiene la forma de $y = -\frac{6}{x}$.

E Acerca de la relación $y = \frac{6}{x}$ conteste lo siguiente.

(1) Calcule los valores de y que corresponden a los valores 10, 100 y 1000 de x. ¿Qué sucede con los valores de y cuando x aumenta?

(2) Calcule los valores de y que corresponde a los valores -10, -100 y -1000 de x. ¿Qué sucede con los valores de y cuando x disminuye?

(3) Calcule los valores de y que corresponden a los valores 0.1, 0.01 y 0.001 de x. ¿Qué sucede con los valores de y cuando x se acerca a cero con valores positivos?

(4) Calcule los valores de y que corresponden a los valores -0.1, -0.01 y -0.001 de x. ¿Qué sucede con los valores de y cuando x se acerca a cero con valores negativos?

(5) Complete la siguiente tabla de la relación $y = -\frac{6}{x}$.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y													

(6) Grafique los puntos correspondientes a la tabla anterior.

(7) Trace la gráfica.

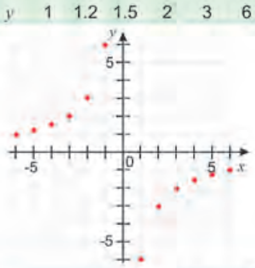
(1) 0.6, 0.06, 0.006; se hacen pequeños. (2) - 0.6, - 0.06, - 0.006; se hacen pequeños si se toma su valor absoluto.

(3) 60, 600, 6,000; se hacen grandes. (4) - 60, - 600, - 6,000; se hacen grandes si se toma su valor absoluto.

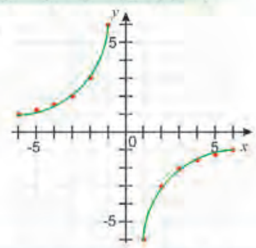
(5)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	1	1.2	1.5	2	3	6	////	-6	-3	-2	-1.5	-1.2	-1

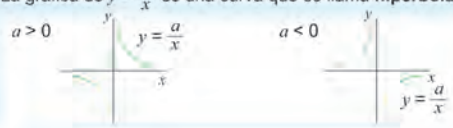
(6)



(7)



La gráfica de $y = \frac{a}{x}$ es una curva que se llama **hipérbola**.



Lección 4: (1~2/2)

Aplicación de la proporcionalidad

Objetivo: • Resolver problemas aplicando la proporcionalidad.

Materiales:

Lección 4: Aplicación de la proporcionalidad

A Se hizo una imagen de un caballo con cartón que pesa 30 g. Un cuadrado hecho de la misma clase de cartón cuyo lado mide 30 cm pesa 45 g. ¿Cuál es el área de la imagen del caballo?



45 g

30 cm

Encuentre la respuesta de dos maneras:

(1) Encontrar el área de 1 g de este cartón.

(2) Utilizar la relación entre el peso x (g) y el área y (cm²) que son directamente proporcionales.

(1) El área del cuadrado es 30 x 30 = 900 (cm²) y su peso es 45 g, por tanto 1 g de este cartón mide 900 ÷ 45 = 20 (cm²).
La imagen del caballo tiene 20 x 30 = 600 (cm²) de área.

(2) Como la relación es directamente proporcional se puede expresar como $y = ax$.
Se sabe que y = 900 cuando x = 45, por lo tanto 900 = 45a, entonces
a = 900 ÷ 45 = 20.
En el caso de la imagen del caballo $y = 20x$ y como x = 30 se tiene que
y = 20 x 30 = 600.

R: La imagen del caballo tiene 600 cm².

B En 2 horas un bus recorre 160 Km. Si la velocidad es constante, ¿cuánto recorre al cabo de 5 horas?



Para resolverlo se pueden utilizar dos maneras:

(1) Empleando la relación $y = ax$ pues ambas cantidades son directamente proporcionales.

(2) Utilizando el concepto de razón.

(1) Sea x horas el tiempo transcurrido y y Km la distancia recorrida.
Como y = 160 Km cuando x = 2 horas, entonces 160 = 2a lo que implica
que $a = \frac{y}{x} = \frac{160}{2} = 80$
Luego $y = 80x$. ¿Qué distancia recorre si x = 5? sustituyendo queda
y = 80 x 5 = 400. R: El bus recorre 400 Km en 5 horas.

113

1. Comentar lo planteado en el problema. [A]

* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen que se puede resolver de dos maneras.

* Mencionar que si se conoce el área de 1 gramo de cartón se puede calcular el área de 30 gramos.

M: ¿Qué tipo de proporcionalidad es?

RP: Proporcionalidad directa.

M: ¿Qué expresión algebraica usamos cuando es una proporcionalidad directa?

RP: $y = ax$.

M: ¿Qué valor tiene a en este caso?

RP: a = 20.

M: ¿Cómo se expresa la relación usando las respuestas anteriores?

RP: $y = 20x$.

2. Comentar lo propuesto en el problema. [B]

* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen que se puede resolver de dos maneras.

*Indicar que como es un caso de proporcionalidad directa se encuentra el valor de a = 80 y se expresa como la relación $y = 80x$.

* Indicar que se puede resolver utilizando el concepto de razón para formar la proporción 2:5 = 160:x y concluir que 5 x 160 = 2x para obtener x = 400.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

3. Resolver 1.

4. Comentar lo observado en el problema. [C]

* Mencionar que el dibujo es de otra situación y se utiliza para que se formen una idea del problema planteado.
* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen que se trata de una proporción inversa.
* Indicar que como la cantidad de los dientes que pasa por un segundo es la misma en los dos engranajes el producto xy es constante.
* Indicar que calculando el valor de $a = 80$, la relación se expresa como $y = \frac{80}{x}$.
* Calculan el valor de y cuando $x = 16$.

Continúa en la siguiente página...

Lección 4: (1~2/2) Aplicación de la proporcionalidad

[Continuación]

Objetivo:

Materiales:

(2) Los datos se organizan en una tabla.

Tiempo (horas)	Distancia (Km)
2	160
5	x

La cantidad desconocida x se escribe en la columna de Distancia, porque se nos pide encontrar la distancia recorrida en 5 horas. De la información de la tabla se establece la proporción 2:5 = 160:x. Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que 5 x 160 = $2x$; entonces x = 800 ÷ 2 = 400

R: El bus recorre 400 Km en 5 horas.

1 Resuelva.

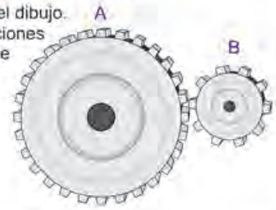
(1) ¿Cuál es la altura del asta de una bandera si su sombra mide 24 m cuando un edificio de 6 m tiene una sombra de 36 m?

PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{36}{6} = 6$ $\quad y = ax \quad 24 = 6x \quad x = 4$ R: 4 m

(2) Juan tiene un cuadro que mide 3 pulgadas de largo y 2 pulgadas de ancho. Si quiere aumentarlo en un papel que mide 18 pulgadas de largo, ¿cuánto debe medir de ancho?

PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ $\quad y = ax \quad 18 = \frac{3}{2}x \quad x = 12$ R: 12 pulgadas

C Dos engranajes se unen de forma similir a los del dibujo. El engranaje B tiene 10 dientes y hace 8 revoluciones por segundo. Se supone que el engranaje A tiene x dientes y hace y revoluciones por segundo.



(1) Encuentre la relación entre x y y.

(2) ¿Cuántas revoluciones por segundo hace el engranaje A si tiene 16 dientes?

(1) La cantidad de los dientes que pasa en un segundo por la posición donde los dos engranajes se unen es la misma en los dos engranajes, es decir la relación entre x y y es inversamente proporcional por tanto, $a = xy = 10 \times 8 = 80$

y entonces si $a = 80$ entonces $y = \frac{a}{x} = \frac{80}{x}$ por tanto $y = \frac{80}{x}$

(2) Si el engranaje A tiene 16 dientes, ¿cuántas revoluciones hace por segundo?

Como $y = \frac{80}{x}$ y $x = 16$ (dientes) entonces $y = \frac{80}{16} = 5$ (revoluciones por segundo).

R: 5 revoluciones por segundo.

Lección 4: (1~2/2) Aplicación de la proporcionalidad

[Continuación]

D En una excursión participan 6 personas y llevan alimento para 12 días. Al salir la excursión faltan 2 personas. ¿Cuántos días durará el alimento para el resto del grupo?



(1) Sea x las personas que participan en la excursión y y la cantidad de alimento.
Como la relación entre x y y es inversamente proporcional $a = xy = 6 \times 12 = 72$,
por tanto como $y = \frac{a}{x}$ se tiene que $y = \frac{72}{x}$.
Como faltaron 2 personas entonces a la excursión asistieron 4 personas ($x = 4$)
y aplicando la relación $y = \frac{72}{x}$ resulta $y = \frac{72}{4} = 18$.

R: El alimento durará 18 días.

(2) Al emplear el concepto de las proporciones y la razón inversa se deben organizar los datos en una tabla.

Personas	Duración del alimento (días)
6	12
4	x

Como en este caso la relación entre las cantidades es inversamente proporcional se invierte una de las razones (razón inversa). En este problema invertimos la primera razón 6:4 y obtenemos una nueva proporción $4:6 = 12:x$. Luego se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.

$$6 \times 12 = 4x$$
$$72 = 4x$$
$$\frac{72}{4} = x$$
$$x = 18$$

R: 18 días.

2 Resuelva.

(1) Doce (12) obreros hacen una obra en 5 días. ¿Cuántos días se tardan 15 obreros en hacer la misma obra y trabajando al mismo ritmo?

PO: $a = xy = 12(5) = 60$ $y = \frac{a}{x}$ $y = \frac{60}{15}$ $y = 4$ R: 4 días

(2) Una pila tarda en llenarse 40 minutos con una llave. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la misma pila si hay 4 llaves con la misma presión de agua?

PO: $a = xy = 1(40) = 40$ $y = \frac{a}{x}$ $y = \frac{40}{4}$ $y = 10$ R: 10 minutos

115

... viene de la página anterior.

5. **Comentar lo observado en el problema. [D]**

* Aprovechando los comentarios hacer que identifiquen que se trata de una proporción inversa.
* Es importante que los estudiantes establezcan la relación "a menor número de personas más días durará la comida" o viceversa; asimismo que se den cuenta que si faltan 2 personas a la excursión la cantidad de personas que va es 4.
* Indicar que se puede resolver utilizando el concepto de razón inversa para formar la proporción $4:6 = 12:x$ y concluir que $6 \times 12 = 4x$ para obtener $x = 18$.

6. **Resolver 2.**

1. **Comentar lo observado en el problema. [A]**

* Indicar que calculen la razón de los estudiantes que faltan a la cantidad total y que la expresen con números decimales.

M: ¿Es posible escribir $\frac{1}{20}$ como una fracción con denominador 100? ¿Qué hay que hacer? ¿Cuál es esa fracción?

RP: Sí, multiplicando ambos términos por 5, se obtiene $\frac{5}{100}$.

M: Calcule la expresión decimal de $\frac{5}{100}$ y compárela con la de $\frac{1}{20}$, ¿cómo son?

RP: Iguales.

2. **Llamar por ciento a la razón de un número a 100.**

* Indicar que el por ciento tiene la ventaja de expresar una razón con menos cantidad de cifras decimales.

* Indicar que 5% significa 5 de cada 100.

* Analizar el caso de la población hondureña.

3. **Resolver 1.**

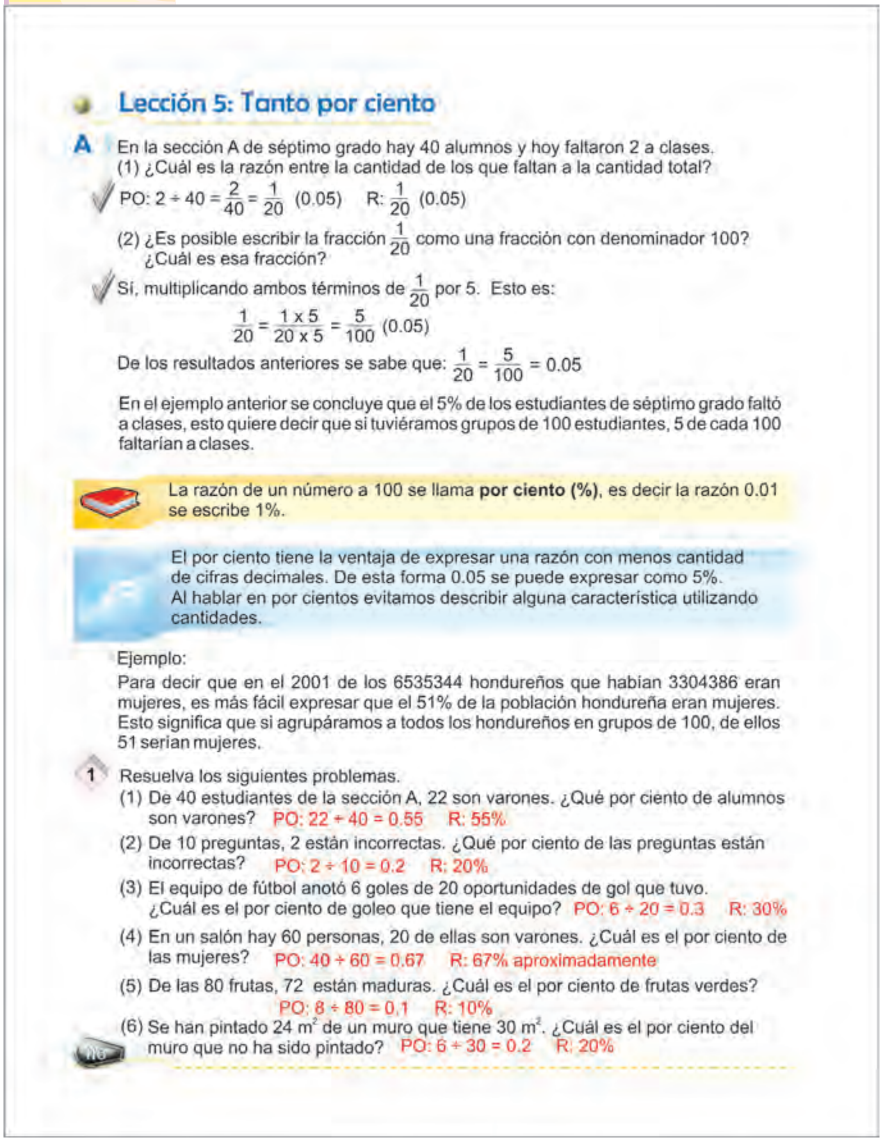
Lección 5: (1/3)

Tanto por ciento

Objetivo:

• Resolver problemas calculando el por ciento que representa un número de otro.

Materiales:



Lección 5: Tanto por ciento

A En la sección A de séptimo grado hay 40 alumnos y hoy faltaron 2 a clases.
(1) ¿Cuál es la razón entre la cantidad de los que faltan a la cantidad total?

PO: $2 \div 40 = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$ (0.05) R: $\frac{1}{20}$ (0.05)

(2) ¿Es posible escribir la fracción $\frac{1}{20}$ como una fracción con denominador 100? ¿Cuál es esa fracción?

Sí, multiplicando ambos términos de $\frac{1}{20}$ por 5. Esto es:

$$\frac{1}{20} = \frac{1 \times 5}{20 \times 5} = \frac{5}{100} \text{ (0.05)}$$

De los resultados anteriores se sabe que: $\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0.05$

En el ejemplo anterior se concluye que el 5% de los estudiantes de séptimo grado faltó a clases, esto quiere decir que si tuviéramos grupos de 100 estudiantes, 5 de cada 100 faltarían a clases.

La razón de un número a 100 se llama **por ciento (%)**, es decir la razón 0.01 se escribe 1%.

El por ciento tiene la ventaja de expresar una razón con menos cantidad de cifras decimales. De esta forma 0.05 se puede expresar como 5%.
Al hablar en por cientos evitamos describir alguna característica utilizando cantidades.

Ejemplo:
Para decir que en el 2001 de los 6535344 hondureños que habian 3304386 eran mujeres, es más fácil expresar que el 51% de la población hondureña eran mujeres. Esto significa que si agrupáramos a todos los hondureños en grupos de 100, de ellos 51 serian mujeres.

1 Resuelva los siguientes problemas.

(1) De 40 estudiantes de la sección A, 22 son varones. ¿Qué por ciento de alumnos son varones? PO: $22 \div 40 = 0.55$ R: 55%

(2) De 10 preguntas, 2 están incorrectas. ¿Qué por ciento de las preguntas están incorrectas? PO: $2 \div 10 = 0.2$ R: 20%

(3) El equipo de fútbol anotó 6 goles de 20 oportunidades de gol que tuvo. ¿Cuál es el por ciento de goleo que tiene el equipo? PO: $6 \div 20 = 0.3$ R: 30%

(4) En un salón hay 60 personas, 20 de ellas son varones. ¿Cuál es el por ciento de las mujeres? PO: $40 \div 60 = 0.67$ R: 67% aproximadamente

(5) De las 80 frutas, 72 están maduras. ¿Cuál es el por ciento de frutas verdes? PO: $8 \div 80 = 0.1$ R: 10%

(6) Se han pintado 24 m^2 de un muro que tiene 30 m^2. ¿Cuál es el por ciento del muro que no ha sido pintado? PO: $6 \div 30 = 0.2$ R: 20%

Lección 5: (2/3)

Tanto por ciento

Objetivo: • Resolver problemas calculando el por ciento de un número.

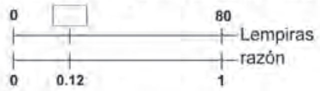
Materiales:

B En un país hay que pagar 12% más del precio de un artículo en concepto de impuesto. Si se compra un libro que cuesta 80 Lempiras, ¿cuánto se paga de impuesto?

(1) Exprese 12% como un número decimal.

0.12

(2) Utilizando el siguiente esquema escriba el impuesto x como una proporción.



De las razones $\frac{0.12}{1}$ y $\frac{x}{80}$ se forma la proporción $\frac{0.12}{1} = \frac{x}{80}$

De ella el valor del impuesto es $x = \frac{80 \times 0.12}{1} = \frac{9.6}{1} = 9.6$



R: 9.60 Lempiras.

Para calcular el por ciento de un número, se multiplica el por ciento dado (en números decimales) por el número dado.

2 Resuelva los siguientes problemas.

(1) El 55% del peso de un hombre adulto es agua. ¿Cuántos Kg de agua tendrá una persona que pesa 60 Kg? PO: $\frac{0.55}{1} = \frac{x}{60}$ $x = 33$ R: 33 kg

(2) El largo de un área de recreación, de forma rectangular, es 275 metros. El ancho es el 20% de la longitud. ¿Cuánto mide el ancho del área recreativa?
PO: $\frac{0.20}{1} = \frac{x}{275}$ $x = 55$ R: 55 m

(3) Pedrito gana el 10% del dinero de la venta de nacatamales. Hoy recaudó 120 Lempiras. ¿Cuánto dinero gana Pedrito?
PO: $\frac{0.10}{1} = \frac{x}{120}$ $x = 12$ R: 12 lempiras

(4) El 60% de lo recaudado en la actividad de la venta de comida, será destinado a la compra de pintura. Si se recaudaron 2400 Lempiras, ¿cuál es la cantidad de dinero destinado para la compra de pintura?
PO: $\frac{0.60}{1} = \frac{x}{2400}$ $x = 1440$ R: 1440 lempiras

(5) María ha leído el 25% de las páginas de un libro que tiene 380 páginas. ¿Cuántas páginas le hacen falta por leer?
PO: $\frac{0.75}{1} = \frac{x}{380}$ $x = 285$ R: 285 páginas

(6) El por ciento de germinación de las semillas de café es 95%. ¿Cuántas semillas no germinaron si se sembraron 5000 semillas?
PO: $\frac{0.05}{1} = \frac{x}{5000}$ $x = 250$ R: 250 semillas

1. Comentar lo observado en el problema. [B]

M: ¿En qué se parece o en qué se diferencia este problema con el de **A**?

RP: Se parecen en que ambos tratan por ciento. Se diferencian en que en **A** se calcula el por ciento que representa un número de otro y en **B** hay que calcular el por ciento de un número.

* Concluir que hay que calcular el 12% de 80.

M: ¿Cómo se puede expresar 12% con números decimales?

RP: Como 0.12

2. Calcular el impuesto utilizando el esquema presentado.

M: Si llamamos x al impuesto que queremos encontrar, ¿cómo podemos expresar el impuesto como una proporción?

RP: Hay dos razones: $\frac{0.12}{1}$ y $\frac{x}{80}$, de las cuales se forma: $\frac{0.12}{1} = \frac{x}{80}$.

* Indicar que calculen el valor de x.

* Concluir que como siempre se dividirá entre 1 el por ciento de un número se calcula directamente multiplicando el número dado por el por ciento dado (expresado en números decimales).

* Es importante que el estudiante siempre dibuje el esquema y forme las proporciones para que las practique y para que este tipo de problemas tenga sentido para él.

3. Resolver 2.

1. **Comentar lo observado en el problema. [C]**

M: ¿En qué se parece o en qué se diferencia este problema con los de **A** y **B**?

RP: Se parecen en que todos tratan por ciento. Se diferencian en que en **C** se calcula el total dado un por ciento de éste.

* Concluir que hay que calcular el número del cual 66 es el 22%.

M: ¿Cómo se puede expresar 22% con números decimales?

RP: Como 0.22

2. **Calcular el total de la carne utilizando el esquema presentado.**

M: Si llamamos x al total de carne que queremos encontrar, ¿cómo podemos expresar el total como una proporción?

RP: Hay dos razones:

$\frac{66}{x}$ y $\frac{0.22}{1}$, de las cuales se forma: $\frac{66}{x} = \frac{0.22}{1}$

* Indicar que calculen el valor de x.

* Concluir que como siempre se multiplicará por 1 el total de un número se calcula directamente dividiendo el número dado entre el por ciento dado (expresado en números decimales).

* Es importante que el estudiante siempre dibuje el esquema y forme las proporciones para que las practique y este tipo de problemas tenga sentido para él.

3. **Resolver 3.**

Lección 5: (3/3) Tanto por ciento

Objetivo: • Resolver problemas calculando el total dado un por ciento del total.

Materiales:

C El 22% del peso de la carne de res es proteína. Para tomar 66 g de proteína, ¿cuánta carne de res hay que comer?

(1) Exprese 22% como un número decimal.

0.22

(2) Utilizando el siguiente esquema escriba el total x como una proporción.



De las razones $\frac{66}{x}$ y $\frac{0.22}{1}$ se forma la proporción $\frac{66}{x} = \frac{0.22}{1}$

De ella el total es $x = \frac{66 \times 1}{0.22} = \frac{66}{0.22} = 300$



R: Hay que comer 300 gramos.

Para calcular un total conociendo el por ciento y la cantidad relacionada a él, se divide ésta cantidad entre el por ciento dado (expresado en números decimales).

3 Resuelva los siguientes problemas.

(1) El 60% de un curso son varones. Si hay 30 varones, ¿cuántos estudiantes tiene el curso? PO: $\frac{30}{x} = \frac{0.6}{1}$ $x = 50$ R: 50 estudiantes

(2) Un señor ahorra 56 Lempiras que representa el 10 % de su salario semanal. ¿De cuánto es el salario semanal de este señor? PO: $\frac{56}{x} = \frac{0.10}{1}$ $x = 560$ R: 560 lempiras

(3) En un tanque lleno de aire hay 3 litros de oxígeno que es el 20% del total que hay en el tanque. ¿Cuántos litros tiene en total el tanque? PO: $\frac{3}{x} = \frac{0.20}{1}$ $x = 15$ R: 15 litros

(4) El 80% de lo recaudado en una actividad que está destinada a la compra de pintura asciende a 1920 Lempiras. ¿Cuánto es la cantidad de dinero recaudado? PO: $\frac{1920}{x} = \frac{0.80}{1}$ $x = 2400$ R: 2400 lempiras

(5) María ha leído el 60% de las páginas de un libro. Si esto representa 228 páginas ¿cuántas páginas tiene el libro? PO: $\frac{228}{x} = \frac{0.60}{1}$ $x = 380$ R: 380 páginas

(6) El 2% representa a 100 semillas de café que no germinaron, ¿cuántas semillas se sembraron? PO: $\frac{100}{x} = \frac{0.02}{1}$ $x = 5000$ R: 5000 semillas

Unidad 4: (1~2/2)

Razón, proporcionalidad y por ciento

Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre las razones, la proporcionalidad y el por ciento.

Materiales:

Ejercicios

1 Exprese las fracciones dadas como razones.

(1) $\frac{3}{4}$ 3:4 (2) $\frac{10}{3}$ 10:3 (3) $\frac{1}{9}$ 1:9 (4) $\frac{6}{5}$ 6:5 (5) $\frac{12}{8}$ 12:8

2 Encuentre la razón inversa de las razones del ejercicio anterior.

(1) 4:3 (2) 3:10 (3) 9:1 (4) 5:6 (5) 8:12

3 Encuentre 3 razones iguales multiplicando por 4, 6 y 8 las razones dadas.

(1) 3:4 12:16, 18:24, 24:32 (2) 5:7 20:28, 30:42, 40:56 (3) 11:2 44:8, 66:12, 88:16 (4) 20:3 80:12, 120:18, 160:24 (5) 8:13 32:52, 48:78, 64:104

4 Simplifique las razones dadas a su mínima expresión.

(1) 150:90 5:3 (2) 320:200 8:5 (3) 550:450 11:9 (4) 50:225 2:9 (5) 180:240 3:4

5 Simplifique a la mínima expresión (con números naturales) las razones dadas.

(1) $\frac{3}{4}:\frac{3}{10}$ 5:2 (2) 3.2:0.8 4:1 (3) $\frac{1}{6}:\frac{3}{20}$ 10:9 (4) 0.05:1.2 1:24

6 Aplique la propiedad fundamental de las proporciones para encontrar x.

(1) $\frac{7}{x} = \frac{4}{12}$ $x = 21$ (2) $\frac{x}{8} = \frac{9}{6}$ $x = 12$ (3) $\frac{4}{12} = \frac{x}{9}$ $x = 3$ (4) $\frac{49}{42} = \frac{7}{x}$ $x = 6$

7 Resuelva los siguientes problemas.

(1) Un bus se tarda 4 horas en recorrer 280 Km. Si la velocidad es constante, ¿cuánto recorre en 12 horas? PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{160}{4} = 40$ $y = ax = 40(12) = 480$ R: 480 Km

(2) Un rectángulo tiene 10 m de base y 8 m de altura. Si otro rectángulo de igual área tiene 16 m de altura, ¿cuál es la medida de su base?

PO: $a = xy = 8(10) = 80$ $y = \frac{a}{x} = \frac{80}{16} = 5$ R: 5 m

(3) Se ha excavado la mitad de un foso en 35 días con 119 obreros. Si el grupo de obreros aumenta en 25, ¿en cuántos días acabarán el trabajo?

PO: $a = xy = 35(119) = 4165$ $y = \frac{a}{x} = \frac{4165}{144} = 28{,}9$ R: 28.9 días

(4) En 30 ℓ de agua de mar hay 900 g de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar se necesitan para producir 2700 g de sal?

PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{900}{30} = 30$ $y = ax$ $2700 = 30x$ $x = 90$ R: 90 ℓ

8 ¿Cuáles de los siguientes casos son directa o inversamente proporcionales?

(1) La sombra y altura de los árboles a las 10:00 am. **Directa**
(2) La distancia recorrida y tiempo empleado. **Directa**
(3) Número de obreros trabajando al mismo tiempo y el tiempo empleado en hacer una obra. **Inversa**
(4) Número de personas y días que comen los alimentos en la misma cantidad cada uno. **Inversa**

119

1. Resolver 1 ~ 13 .

Tipos de ejercicios:

1 Expresión de razones como proporciones

2 Razones inversas

3 Igualdad de razones

4 y **5** Simplificación de razones a su mínima expresión

6 Aplicación de la propiedad fundamental de las proporciones

7 Resolución de problemas de proporcionalidad

8 Proporciones directas o inversas

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

9 Resolución de problemas de proporcionalidad

10 Gráficas de proporcionalidad y expresión de y en términos de x

* Se puede intercambiar x y y.

11 ~ **13** Por ciento

[Hasta aquí ejercicios de la unidad]

[Desde aquí evaluación de la unidad]

1. Resolver 1 .

Continúa en la siguiente página...

Unidad 4: (1~2/2) Razón, proporcionalidad y por ciento

[Continuación]

Evaluación de la unidad

(5) Costo de un artículo y número de artículos que se compran con una cantidad fija. **Inversa**
(6) Números de personas y alimentos necesarios. **Directa**
(7) Cantidad de postre y azúcar empleada. **Directa**
(8) Radio y longitud de la circunferencia. **Directa**
(9) Velocidad de un auto y tiempo en recorrer determinada distancia. **Inversa**
(10) Galones de pintura y área a pintar. **Directa**

9 Resuelva los siguientes problemas.

(1) Para descargar un furgón cargado de café en 4 horas se necesitan 6 peones. Si el gerente del beneficio contrata 2 peones más, ¿cuánto tiempo se tardarán en descargar el furgón? PO: $a = xy = 6(4) = 24$ $y = \frac{a}{x} = \frac{24}{8} = 3$ R: 3 horas

(2) Un trabajador recibió L. 210.00 por trabajar 3 días. ¿Cuánto dinero recibirá si trabaja 7 días? PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{210}{3} = 70$ $y = ax = 70(7) = 490$ R: 490 Lempiras

(3) Un auto cuya velocidad es 60 Km/h necesita 6 horas para recorrer una distancia. ¿Cuántas horas se tardará otro automóvil si su velocidad es 90 Km/h? PO: $a = xy = 60(6) = 360$ $y = \frac{a}{x} = \frac{360}{90} = 4$ R: 4 horas

(4) Para pintar una pared de 30 m² se necesitarán 5 galones de pintura. ¿Cuántos galones de pintura se necesitarán para pintar 42 m²? PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{30}{5} = 6$ $y = ax$ $42 = 6x$ $x = 7$ R: 7 galones

10 En los cuatro ejercicios de **9** exprese y en término de x y grafíquelos.
(1) $y = \frac{24}{x}$ (2) $y = 70x$ (3) $y = \frac{360}{x}$ (4) $y = 6x$ Se omite la gráfica

11 ¿Cuánto es el 70% de 300? PO: $\frac{x}{300} = \frac{0.7}{1}$ R: 210

12 De los 500 Lempiras que ganó, Lesli ahorró 115 Lempiras, ¿qué por ciento ahorró?
PO: $115 \div 500 = 0.23$ R: 23%

13 José Carlos ganó de interés en la cooperativa 160 Lempiras que equivale al 16% de lo que ahorro. ¿Cuánto dinero tenía José Carlos antes de depositar el dinero?
PO: $\frac{160}{x} = \frac{0.16}{1}$ R: 1000 lempiras

Evaluación

1 Seleccione la respuesta correcta.

(1) Los medios en 5:3 = 15:9 son:
1) 5, 9 (2) 3, 15 3) 5, 15 4) 3, 9

(2) ¿Cuál de las siguiente expresiones es una proporción?
1) 1:2 = 2:3 2) 5:8 = 8:5 (3) 3:7 = 12:28 4) 1:4 = 4:12

(3) Una razón equivalente a 1.8:3 es:
(1) 3:5 2) 5:3 3) 1:3 4) 5:1

(4) Una razón equivalente a $\frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ es:
1) 7:2 2) 2:7 3) 2:9 (4) 9:2

Razón, proporcionalidad y por ciento

Evaluación de la unidad

[Continuación]

... viene de la página anterior.

2. Resolver 2 ~ 5.

(5) La razón equivalente a 72:96 en su mínima expresión es:
1) 9:12 2) 18:24 (3) 3:4 4) 36:48

(6) Si x y y son directamente proporcionales, y $y = 8$ cuando $x = 2$ entonces el valor de la constante de proporcionalidad a es:
1) 16 2) 6 (3) 4 4) $\frac{1}{2}$

(7) Si $y = 10$ cuando $x = 3$, x y y son directamente proporcionales, entonces y expresando en términos de x es:
(1) $y = \frac{10}{3}x$ 2) $y = \frac{3}{10}x$ 3) $y = 30x$ 4) $y = 3x$

(8) Si x y y son inversamente proporcionales y $y = 8$ cuando $x = 2$, entonces el valor de la constante de proporcionalidad a es:
1) 4 2) $\frac{1}{4}$ (3) 16 4) 10

(9) Si x y y son inversamente proporcionales y $y = 8$ cuando $x = 2$. Al expresar y en términos de x queda.
1) $y = 4x$ 2) $y = 16x$ (3) $y = \frac{16}{x}$ 4) $y = \frac{x}{16}$

(10) De 80 alumnos se reprobaron 4. El por ciento de reprobados es:
(1) 5% 2) 76% 3) 84% 4) 320%

2 Utilizando $\frac{5}{20} = \frac{40}{x}$ elabore para cada una de las siguientes palabras una frase.
(1) Razón
(2) Razón inversa
(3) Proporción
(4) Antecedente
(5) Consecuente
(6) Extremos
(7) Medios
(8) Propiedad fundamental de las proporciones

Se omite la solución

3 Plantee un problema de:
(1) Proporcionalidad directa y grafíquelo.
(2) Proporcionalidad inversa y grafíquelo.

Se omite la solución

4 Sustituya el signo de interrogación por el valor que corresponde.
(1) El 15 % de 700 es 105
(2) El 23% de 900 es 207
(3) El 30% de 800 es 240

5 Resuelva los siguientes problemas.
(1) Se necesitan 45 raciones de comida por día para 15 personas. ¿Cuántas raciones necesitarán en una semana?
PO: $a = \frac{y}{x} = \frac{45}{1} = 45$ $y = ax = 45(7) = 315$ R: 315 raciones

(2) Se tiene comida por 9 días para 16 personas. Si al momento de salir a la excursión faltan 4 personas, ¿cuántos días les durará la comida?
PO: $a = xy = 16(9) = 144$ $y = \frac{a}{x} = \frac{144}{12} = 12$ R: 12 días

121

Unidad 5

Gráficas de faja y circulares

(10 horas)

1 Expectativas de logro

- Construyen gráficas circulares y de faja con información de acontecimientos sencillos de su entorno utilizando la computadora u otro tipo de material.
- Describen y analizan información estadística organizada en gráficos circulares y de faja.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Gráficas de faja y circulares
- Gráficas de faja
- Construcción de gráficas de faja
- Gráficas circulares
- Construcciones de gráficas circulares
- Interpretación de gráficas de faja y circulares

→

Octavo grado

Organización y presentación de datos
- Tabla de frecuencia
- Datos agrupados
- Histograma
- Polígono de frecuencia
- Frecuencia relativa
- Moda
- Media
- Mediana

→

Noveno grado

Extracción de la información
- Rango
- Desviación absoluta media
- Varianza y desviación estándar

↓

Manera de contar
- Principios de conteo
- Aplicación de los principios de conteo

↓

Probabilidad
- Probabilidad y frecuencia relativa
- Base del cálculo de la probabilidad
- Propiedades de la probabilidad
- Cálculo de probabilidades

3 Plan de estudio (10 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Gráficas de faja (3 horas)	1/3	• Gráficas de faja
	2~3/3	• Construcción de gráficas de faja
2. Gráficas circulares (5 horas)	1/5	• Gráficas circulares
	2~4/5	• Construcción de gráficas circulares
	5/5	• Interpretación de gráficas de faja y circulares
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	
Evaluación	No hay horas	

Puntos de lección

Lección 1: Gráficas de faja

Para expresar la razón de cada parte de los datos al total se utilizan las gráficas de faja y las gráficas circulares. Estas últimas se estudian en la lección 2.

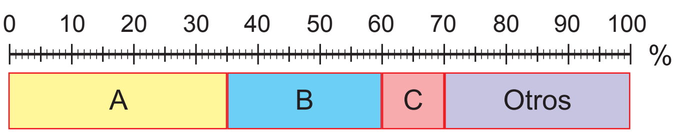
En el siguiente ejemplo se muestra la gráfica de faja y la gráfica circular que corresponde a los datos de la tabla 1.

Ejemplo:

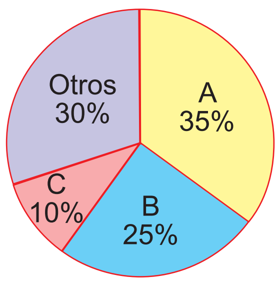
Tabla 1

Categoría	Por ciento
A	35
B	25
C	10
Otros	30
Total	**100**

Gráfica de faja



Gráfica circular



Como en el caso del gráfico de barras, por lo general, se colocan los datos de mayor a menor salvo la categoría otros.

Existen casos donde se colocan los datos de manera diferente con alguna intención como ser mostrar los datos en el orden cronológico. Por ejemplo en el problema **B** de la lección 1 (Gráficas de faja) y **B** de la lección 2 (Gráficas circulares) los datos de la ciudad B se colocan en el mismo orden que los datos de la ciudad A con el fin de hacer la comparación entre ambas ciudades.

Cuando se redondea el por ciento puede ocurrir que el total no sea 100%. En este caso, se arregla cambiando el por ciento de la categoría "Otros" o de la categoría que tiene la mayor cantidad de modo que el total sea 100%.

Con la gráfica de faja o la gráfica circular se ve fácilmente la relación de cada parte con el total y la de los datos entre sí.

Lección 2: Gráficas circulares

Lo expresado en la lección anterior es valido para las gráficas circulares. En el caso específico de la gráfica circular, la razón de la medida del área de cada categoría con respecto al total del área del círculo corresponde a la razón de cada dato con respecto al total. La misma relación se da entre el arco de cada categoría y la circunferencia (perímetro del círculo) y entre el ángulo central de cada categoría y 360º. Esto es:

$$\frac{\text{dato}}{\text{total}} = \frac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}} = \frac{\text{grado}}{360^\circ} = \frac{\text{arco}}{\text{circunferencia}}$$

En el círculo, como 360º corresponde al 100%, entonces 3.6º de ángulo central equivale a 1%. Esto se deduce de la proporción

x: 360 = 1:100 de lo cual

$$x = \frac{360 \times 1}{100} = 3.6 \text{ (grados).}$$

Así, para encontrar la cantidad de grados de la categoría A que corresponde a 35% (ejemplo anterior) se multiplica este por ciento por 3.6 (grados), esto es: 35 x 3.6 = 126 (grados). Esto es útil cuando se quiere dibujar la gráfica circular sin hacer todas las divisiones correspondientes a los por cientos, conociendo el número de grados se puede ubicar fácilmente el sector que corresponde a cada categoría.

Desarrollo de clases

1. Comentar lo observado en el dibujo. [A]

* Aprovechando los comentarios hacer referencia a la escala y las cinco categorías dadas.

2. Encontrar el por ciento en cada una de las categorías [A1].

M: ¿Cómo podemos encontrar los por cientos en cada categoría?

* Indicar que cuenten las rayitas en cada categoría.

M: ¿De qué forma es más fácil contar las rayitas?

* Indicar que también se pueden contar de 5 en 5 o de 10 en 10 cuando se pueda.

* Indicar que llenen la tabla en la fila de por cientos.

3. Encontrar las cantidades en cada categoría cuando el total de libros es 500. [A2]

M: ¿Cómo podemos calcular las cantidades cuando el total de libros es 500?

RP: Utilizando el por ciento, multiplicando por 5, etc.

* Indicar que llenen la tabla en la fila de cantidad.

4. Llamar a este tipo de gráficas "gráficas de faja".

* Indicar que en las gráficas de faja se observa fácilmente la proporción de cada parte.

5. Establecer la relación de los por cientos con la cantidad cuando el total de libros es 500.

Lección 1: (1/3) **Gráficas de faja**

Objetivo: • Conocer las gráficas de faja.

Materiales: (M) Gráfica de faja del LE para la pizarra.
(N) LE, regla.

Unidad 5 **Gráficas de faja y circulares**

Lección 1: Gráficas de faja

Sección 1. Gráficas de faja

A La gráfica de abajo muestra la proporción de la cantidad de libros según la clasificación de la biblioteca de una escuela.

0–35	35–55	55–68	68–74	74–100
Literatura	Ciencias Naturales	Ciencias Sociales	Arte	Otros

(Escala: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100)

1 ¿Qué por ciento representan los libros de Literatura, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Arte y Otros?

2 Si la cantidad total de libros es 500, ¿cuántos libros de cada categoría hay?

Categoría	Literatura	Ciencias Naturales	Ciencias Sociales	Arte	Otros	Total
Por ciento (%)						
Cantidad						

✓

Categoría	Literatura	Ciencias Naturales	Ciencias Sociales	Arte	Otros	Total
Por ciento (%)	35	20	13	6	26	**100**
Cantidad	175	100	65	30	130	**500**

A la gráfica anterior se le llama gráfica de faja. Con la gráfica de faja se observa fácilmente la proporción de cada parte.

* Indicar que las cantidades en cada categoría corresponden a sus respectivos por cientos y que las proporciones de la gráfica de faja en cada categoría son las mismas cuando el total de libros es 100 ó 500.

Lección 1: (2/3)

Gráficas de faja

Objetivo: • Construir gráficas de faja.

Materiales: (M) LE, regla. (N) LE, regla.

Sección 2. Construcción de gráficas de faja

B La siguiente lista muestra el tipo de vehículo que pasa por la entrada de las ciudades A y B.

Vehículo	Ciudad A		Ciudad B	
	Cantidad	Por ciento (%)	Cantidad	Por ciento (%)
Taxi	47		42	
Camión	38		28	
Carro particular	31		53	
Autobús	22		33	
Otros	35		24	
Total	**173**		**180**	

1 Calcule el por ciento de cada parte al total redondeándolo hasta las unidades.

Notas

▶ Si el total de los por cientos no es 100 por causa del redondeo entonces se arregla cambiando el por ciento de la categoría "Otros" o la categoría que tiene mayor cantidad de modo que el total sea 100. ◀

▶ La fórmula para calcular el por ciento es $\% = \frac{dato}{total} \times 100$. ◀

✓

Vehículo	Ciudad A		Ciudad B	
	Cantidad	Por ciento (%)	Cantidad	Por ciento (%)
Taxi	47	27	42	23
Camión	38	22	28	16
Carro particular	31	18	53	29
Autobús	22	13	33	18
Otros	35	20	24	~~13~~ 14
Total	**173**	**100**	**180**	**~~99~~ 100**

1. **Pensar en la forma de encontrar los por cientos. [B]**

* ¿Cómo podemos calcular los por cientos que hacen falta en la tabla?

2. **Encontrar el por ciento en cada una de las categorías [B1].**

M: ¿Cómo podemos encontrar los por cientos en cada categoría?

* De los ejercicios trabajados en la lección 5 de la unidad 5 deducir la fórmula:

$$(\% = \frac{dato}{total} \times 100).$$

* Indicar que llenen la tabla en la fila de por cientos y los redondeen a las unidades.

Por ejemplo:

$$\% = \frac{47}{173} \times 100$$

que es igual a

0.27 x 100 = 27.16763

al redondear resulta 27.

3. **Pensar qué hacer cuando el total del por ciento no es 100.**

M: ¿Qué podemos hacer cuando el total del por ciento no da 100?.

RP: Dejarlo aproximado, redondear algunas cantidades para que dé 100, etc.

* Indicar que se arregla cambiando (aproximando) el por ciento en la categoría Otros o en la categoría de mayor cantidad para que el total sea 100.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior

4. Dibujar las gráficas de faja. [B2]

* Indicarles que sigan las instrucciones dadas para construir la gráfica.

5. Pensar en la colocación de las categorías en las gráficas.

M: ¿Cuál es la mejor manera de colocar las gráficas?

* Indicar que en algunos casos las categorías de las gráficas se colocan de determinada forma en función de los propósitos que se tengan.

[Hasta aquí 2/3]

[Desde aquí 3/3]

1. Resolver 1.

* Indicar que deben seguir los pasos desarrollados en la clase anterior referente a la construcción de las gráficas de faja.

* Indicar que la "f" equivale a la "frecuencia" y significa lo mismo que la "cantidad" utilizada en los ejercicios anteriores.

* Indicar que se cercioren que la suma de los por cientos es 100.

* Indicar que la escala utilizada debe tener graduaciones exactas.

* Supervisar el trabajo individual de los estudiantes.

Lección 1: (2/3)

Gráficas de faja

[Continuación]

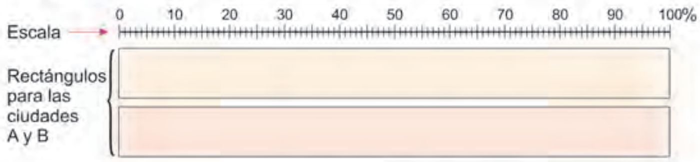
Objetivo: (3/3) • Confirmar la construcción de gráficas de faja.

Materiales: (M) LE, regla. (N) LE, regla.

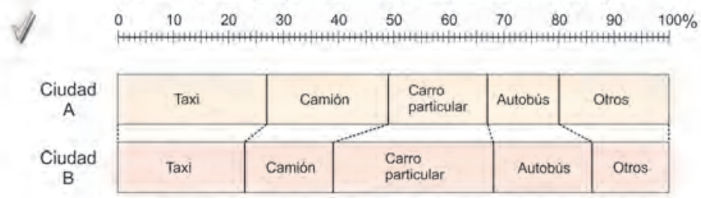
2 Dibuje las gráficas de faja según las siguientes instrucciones.

(1) Se escribe la categoría "Otros" en el último lugar cualquiera que sea el por ciento.

(2) Por lo general se colocan las categorías en orden (de mayor a menor), según el por ciento, sin embargo si se tiene algún propósito como la comparación se puede cambiar el orden.



Tipo de vehículo que pasa por las entradas de las ciudades A y B



La gráfica que corresponde a la ciudad B se coloca debajo de la gráfica de la ciudad A para facilitar la comparación entre las mismas categorías.

1 Construya para cada tabla una gráfica de faja. **Se omite la solución**

(1)

Satisfacción en la clase de matemáticas	f
Muy satisfecho	12
Satisfecho	24
Poco satisfecho	18
Insatisfecho	8
No sabe	10
Total	**72**

(2)

Preferencia programas de TV	f
Películas	8
Deportes	10
Noticias	12
Dibujos animados	9
Ninguno	3
Total	**42**

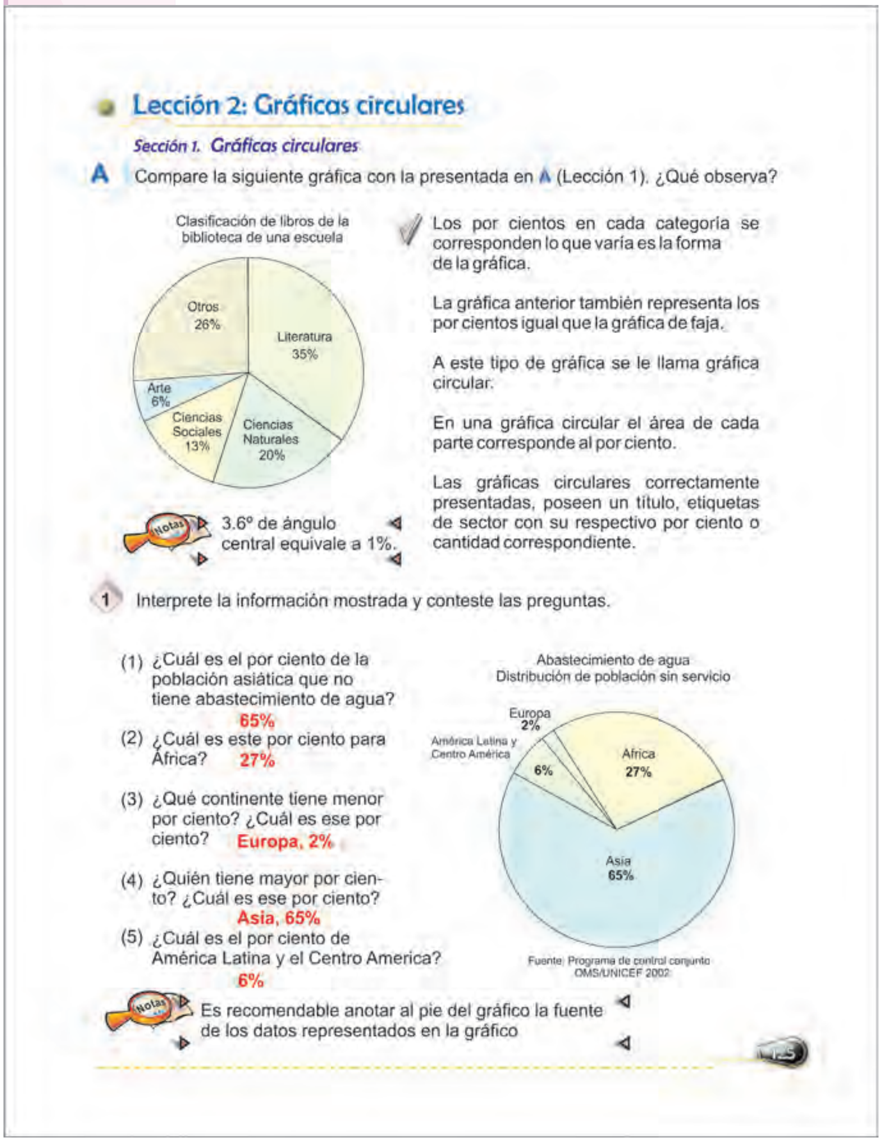
(3)

Películas preferidas	f
Dramas	6
Aventura	18
Comedia	10
Documentales	4
Ficción	12
Total	**50**

Lección 2: (1/5) **Gráficas circulares**

Objetivo: • Conocer las gráficas circulares.

Materiales: (M) Gráfica circular del LE para la pizarra. (N) LE, regla, compás, transportador.



Lección 2: Gráficas circulares

Sección 1. Gráficas circulares

A Compare la siguiente gráfica con la presentada en A (Lección 1). ¿Qué observa?

Los por cientos en cada categoría se corresponden lo que varía es la forma de la gráfica.

La gráfica anterior también representa los por cientos igual que la gráfica de faja.

A este tipo de gráfica se le llama gráfica circular.

En una gráfica circular el área de cada parte corresponde al por ciento.

Las gráficas circulares correctamente presentadas, poseen un título, etiquetas de sector con su respectivo por ciento o cantidad correspondiente.

Notas: 3.6° de ángulo central equivale a 1%.

1 Interprete la información mostrada y conteste las preguntas.

(1) ¿Cuál es el por ciento de la población asiática que no tiene abastecimiento de agua? **65%**

(2) ¿Cuál es este por ciento para África? **27%**

(3) ¿Qué continente tiene menor por ciento? ¿Cuál es ese por ciento? **Europa, 2%**

(4) ¿Quién tiene mayor por ciento? ¿Cuál es ese por ciento? **Asia, 65%**

(5) ¿Cuál es el por ciento de América Latina y el Centro America? **6%**

Notas: Es recomendable anotar al pie del gráfico la fuente de los datos representados en la gráfico

Explicar que tomando en cuenta que el círculo equivale al 100% y que además el círculo tiene 360°, un ángulo central de 3.6° equivale a 1%. Esto es importante que el estudiante lo sepa porque lo puede utilizar al momento de hacer gráficas circulares.

1. Comentar lo observado en el dibujo. [A]

* Aprovechando los comentarios hacer referencia a la escala y las cinco categorías dadas.

2. Comparar la gráfica de faja (lección 1[A]) con la gráfica circular.

M: Compare esta gráfica circular con la gráfica de faja de la lección 1 y establezca las diferencias y las semejanzas.

RP: Los por cientos son los mismos, la forma es distinta, las categorías se distribuyen en sectores circulares.

* Hacer referencia al título y la forma correcta de rotular los sectores con la etiqueta respectiva y el %.

3. Llamar a este tipo de gráficas "gráficas circulares".

* Indicar que en las gráficas circulares se observa fácilmente la proporción de cada parte y que el área de cada parte corresponde al por ciento.

* Para hacer las subdivisiones en sectores, se marca un punto de referencia, generalmente en la parte superior y se distribuyen en sentido horario.

4. Resolver 1 .

* Indicar que en este ejercicio los por cientos son cantidades exactas.

* Indicar que la suma de los por cientos es 100.

* Hacer una discusión grupal de las respuestas.

1. Construir la gráfica circular. [B(1)]

* Indicar que elaboren la tabla con las 4 columnas.

* Indicar que calculen los por cientos y los grados (pídales que los calculen usando las proporciones).

* Indicar que escriban el título de la gráfica.

* Indicar que la primera categoría se ubica a partir del punto de referencia seleccionado (usar de preferencia el Norte o inicio de las doce como en el reloj) y contar los grados a partir de aquí en el sentido horario.

* Las siguientes categorías se contarán a partir de la anterior, sumando los grados a la anterior, ejemplo: 75° + 246° = 921° a partir el punto de referencia inicial; o comenzando de cero a partir de la marca final de la categoría anterior.

* Indicar que escriban el nombre a cada una de las categorías de la gráfica y su % correspondiente.

* Si hay fuente para la gráfica en los datos proporcionados indicar a sus estudiantes que la escriban al final de ésta.

Continúa en la siguiente página...

Lección 2: (2/5) Gráficas circulares

Objetivo:
- Construir gráficas circulares.
- Establecer la relación que existe entre las razones de cada categoría de las gráficas circulares.

Materiales: (M) LE, regla, compás, transportador. (N) LE, regla, compás, transportador, calculadora.

Sección 2. Construcción de gráficas circulares

B Con los datos siguientes.

Los kilómetros de carretera, según la "Clasificación de la red vial oficial de 2002", se distribuyen así: Pavimentada 2845 Km, transitable todo el tiempo 9357 Km y transitable sólo en verano 1484 Km. (Fuente: Honduras en cifras, BCH)

(1) Elabore una tabla de 4 columnas (tipo de carretera, Km, % y grados) y haga la gráfica circular.

Clasificación de la red vial oficial (2002)

Tipo de Carretera	Km	%	Grados (°)
Pavimentada	2845	21	75
Transitable todo el tiempo	9357	68	246
Transitable sólo en verano	1484	11	39
Total	**13686**	**100**	**360**

Fuente: Honduras en cifras, BCH

Para calcular los por cientos (%) se utilizan proporciones.
Ejemplo: Si 2845:x = 13686:100 entonces $x = \frac{2845 \times 100}{13686} = 20.78... \cong 21$

Para calcular los grados (°) se utilizan proporciones.
Ejemplo: Si 2845:x = 13686:360 entonces $x = \frac{2845 \times 360}{13686} = 74.83... \cong 75$

Clasificación de la red vial oficial (2002)



Fuente: Honduras en cifras, BCH

Notas: Es importante que supervise el trabajo de sus estudiantes para verificar el uso correcto del transportador.

Lección 2: (2/5)

Gráficas circulares

[Continuación]

Objetivo: (3~4/5) • Confirmar la manera de construir gráficas circulares.

Materiales: (M) LE, regla, compás, transportador.
(N) LE, regla, compás, transportador

(2) Verifique que las razones en cada categoría son iguales.

Igualdad de las razones en cada categoría.

$\frac{2845}{13686} = \frac{21}{100} = \frac{75}{360}$ → Pavimentada

$\frac{9357}{13686} = \frac{68}{100} = \frac{246}{360}$ → Transitable todo tiempo

$\frac{1484}{13686} = \frac{11}{100} = \frac{39}{360}$ → Transitable sólo en verano

En algunos casos las razones pueden diferir debido al proceso de redondeo.

En el caso de la gráfica circular se dan 4 razones que son iguales en cada categoria. Estas razones son:

$$\frac{dato}{total} = \frac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}} = \frac{grado}{360°} = \frac{arco}{\text{perímetro del círculo}}$$

2 Siga las instrucciones de 1 utilizando la siguiente información.

Quintales de granos básicos que tienen almacenados en una bodega.

Granos basicos	Quintales	%	Grados °
Frijoles	2950	30	108
Arroz	2240	23	82
Maiz	2805	28	102
Soya	1862	19	68
Total	9857	100	360



127

... viene de la página anterior

2. Encontrar la relación entre las razones de cada categoría. [B(2)]

* Indicar que para cada categoría encuentren:

a) la razón de la cantidad al total.

b) la razón del por ciento a 100.

c) la razón de los grados a 360° (Estos cálculos los pueden realizar utilizando calculadora).

M: Compare estos resultados en cada categoría, ¿Cómo son?

RP: Son iguales, casi iguales, aproximados, distintos, etc.

* Indicar que en algunos casos las razones pueden diferir debido al proceso de redondeo. (Nota del LE).

* Indicar la relación de igualdad que se da entre las razones de cada categoría.

* Indicar esta relación de igualdad utilizando la gráfica.

* Indicar el valor de 1% en la gráfica circular (Nota de la lección 2 clase 1).

[Hasta aquí 2/5]

[Desde aquí 3~4/5]

1. Resolver 2.

* Indicar que hagan la tabla, calculen los por cientos y dibujen la gráfica circular, siguiendo las instrucciones de la clase anterior.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior

2. Pensar en la forma de construir una gráfica circular. [C]

M: ¿Cómo podemos construir una gráfica circular?

* Indicar que utilicen los por cientos calculados en [B] de la lección 1.
* Indicar que escriban el título a la gráfica.
* Indicar que en la escala, la primera categoría se ubica a partir de cero y que las demás se ubican a partir de donde termina la anterior.
* Indicar que escriban el nombre a cada una de las categorías en la gráfica.

(Para facilitar el dibujo de las gráficas circulares y ahorrar tiempo pídale a los estudiantes que las calquen del LE)

3. Resolver 3.

Lección 2: (3~4/5)

Gráficas circulares

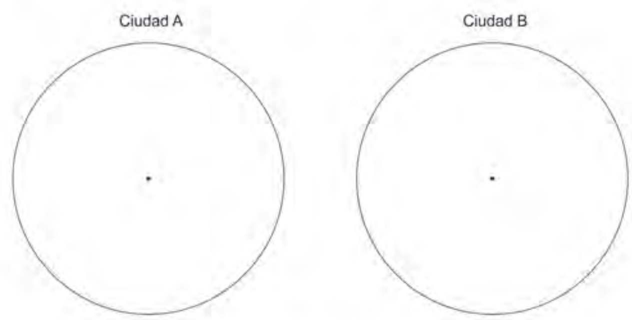
[Continuación]

Objetivo:

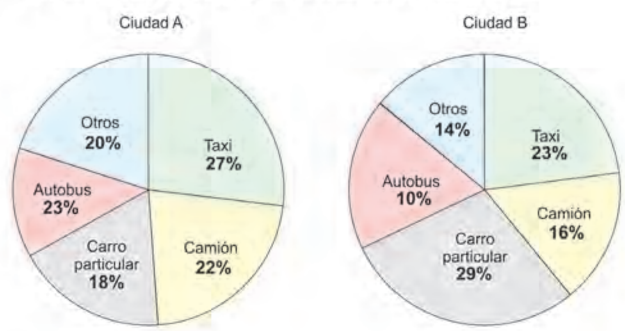
Materiales: (M) LE, regla, compás, transportador.
(N) LE, regla, compás, transportador.

C Exprese los datos de **B** (Sección 2) en gráficas circulares correspondientes.

Tipo de vehículo que pasa por las entradas de las ciudades A y B



Tipo de vehículo que pasa por las entradas de las ciudades A y B



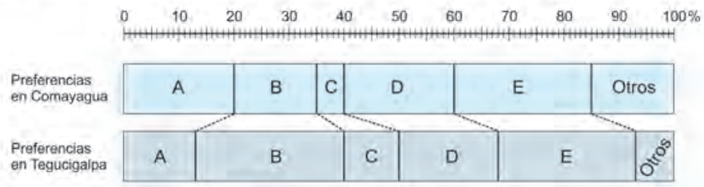
3 Haga una gráfica circular para cada tabla del ejercicio 1. (Sección 2)
Se omite la solución

Lección 2: (5/5) Interpretación de gráficas de faja y circulares

Objetivo: • Interpretar gráficas de faja y circulares.

Materiales: (M) LE, regla, compás, transportador. (N) LE, regla, compás, transportador.

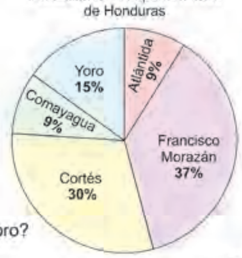
4 Conteste las siguientes preguntas basando sus respuestas en la gráfica dada.



(1) ¿Cuál es el por ciento de A en Comayagua?
20%
(2) ¿Cuál es el por ciento de B en Tegucigalpa?
27%
(3) Compare E de Comayagua y E de Tegucigalpa, ¿qué observa?
El por ciento es el mismo
(4) ¿Quién tiene mayor por ciento en C, Comayagua o Tegucigalpa?
Tegucigalpa
(5) ¿Qué por ciento son menores en Comayagua con respecto a Tegucigalpa?
El de B (15%) y C (5%)
(6) ¿Qué por ciento son mayores en Comayagua con respecto a Tegucigalpa?
El de A (20%), el de D (20%) y otros (15%)
(7) ¿Qué preferencia es mayor en Comayagua?
E (25%)
(8) ¿Qué preferencia es mayor en Tegucigalpa?
B (27%)
(9) ¿Qué preferencia es menor en Comayagua?
C (5%)
(10) ¿Qué preferencia es menor en Tegucigalpa?
Otros (7%)

5 De acuerdo a la gráfica mostrada conteste las siguientes preguntas.

Población de 5 departamentos de Honduras



(1) ¿Qué departamento tiene mayor población?
Francisco Morazán
(2) ¿Qué departamentos tienen menor población?
Comayagua y Atlántida
(3) ¿Cuál es el orden de los departamentos de menor a mayor, según la población?
Atlántida, Comayagua, Yoro, Cortés y Francisco Morazán
(4) ¿Cuál parece tener el doble de la población de Yoro?
Cortés

129

1. **Resolver 4.**
   *Indicar que contesten las preguntas analizando la información proporcionada en la gráfica de faja.

2. **Resolver 5.**
   * Indicar que contesten las preguntas analizando la información proporcionada en la gráfica circular.
   (En este caso la gráfica circular no tiene escala pero se espera que los estudiantes analicen la información en función del área de cada sector).

1. **Resolver** 1 ~ 5 .

Tipos de ejercicios:

1 Construcción de gráficas de faja y circulares.

2 Cálculo de cantidades en cada categoría dado el total y los por cientos de cada categoría en la gráfica de faja.

3 Construcción de gráficas circulares haciendo énfasis en la utilización de los grados.

4 Cálculo de cantidades en cada categoría dado el total y los grados en cada categoría en la gráfica circular.

5 Cálculo de cantidades en cada categoría dado el total y los por cientos de cada categoría en la gráfica circular.

Unidad 5: (1~2/2)

Gráficas de faja y circulares

Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre gráficas de faja y circulares.

Materiales: (M) LE, regla, compás, transportador (N) LE, regla, compás, transportador

Ejercicios

1 Con los datos dados elabore una gráfica de faja y una circular.

(1)

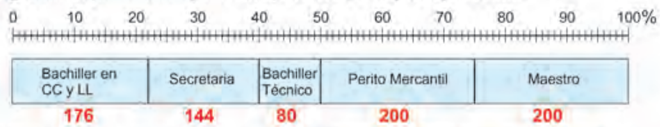
Calificación	Cantidad de estudiantes
No Satisfactorio	15
Bueno	65
Muy Bueno	90
Sobresaliente	50

(2)

Tipo de intervención	Cantidad de intervenciones
Hernia	25
Vesícula	32
Pulmones	8
Riñones	3
Garganta	18

Se omite la solución

2 ¿Cuántas personas hay en cada profesión, si hay 800 personas?



3 Elabore una gráfica circular y utilice el transportador para medir en grados cada categoría.

Deporte	Cantidad de estudiantes
Atletismo	6
Fútbol	25
Básquetbol	10
Volibol	9
	50



4 ¿Cuánto ha vendido la casa comercial de cada uno de los artículos mostrados en la gráfica si en total vendió 32 artículos?



5 ¿Cuántos alumnos prefieren cada uno de los tipos de vacaciones si se encuestaron 40 alumnos?



1. Resolver 1 y 2.

Evaluación

1 Elabore una tabla, una gráfica de faja y una circular con los datos que se dan a continuación

(1) Preferencia de los estudiantes hacia los coordinadores.

Coordinador	Cantidad de Estudiantes
Juan	12
Pedro	20
María	16
Teresa	22

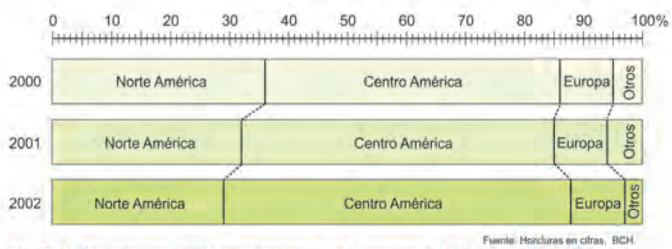
Se omite la solución

(2) Tipos de comida preferidas en el aula de clase: montucas, 13; enchiladas, 10; mondongo, 8; yuca con chicharrón, 5; chop suey, 16 y arroz frito, 6.

Se omite la solución

2 De acuerdo a la gráfica mostrada escribe 5 conclusiones sobre ella.

Turistas por región y año en Honduras



(1) El % de turistas centroamericanos ha aumentado del 2000 al 2002

(2) El % de turistas europeos es constante

(3) El % de turistas norteamericanos decrece año con año

(4) La mayoría de los turistas son centroamericanos

(5) Más del 90% de los turistas proviene de Norte América, Centro América y Europa

Conjunto de puntos

(5 horas)

Expectativas de logro

- Apropian los conceptos de punto, línea y plano como conjuntos de puntos.
- Usan divisiones de líneas para construir rayos y segmentos.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector
- Puntos colineales

Ángulos
- Definición de ángulos
- Congruencia de ángulos
- Clasificación
- Construcciones
- Bisectriz
- Perpendicularidad
- Mediatriz
- Paralelismo

Octavo grado

Triángulos
- Suma de ángulos de triángulos
- Suma de ángulos de polígonos
- Congruencia de triángulos
- Triángulo isósceles y rectángulo
- Puntos notables del triángulo

Cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza
- Rectas paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del Teorema de Pitágoras
- Aplicación del Teorema de Pitágoras

Noveno grado

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Suma de ángulos internos de un polígono regular
- Círculos
- Tangentes
- Área de círculos
- Centro de un polígono regular
- Polígonos regulares y el círculo.

Sólidos geométricos
- Áreas de superficies laterales de paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas
- Volumen de pirámides, cono, cilindro y esfera

3 Plan de estudio (5 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Puntos, rectas y planos (1 hora)	1/1	• Puntos, rectas y planos
2. Rayos y segmentos (3 horas)	1/3	• Definición de rayo y segmento • Longitud y congruencia de segmentos
	2/3	• Distancia y punto medio de un segmento
	3/3	• Bisector de un segmento y puntos colineales
Ejercicios (1 hora)	1/1	
Evaluación	No hay horas	

4 Puntos de lección

Lección 1. Puntos, rectas y planos

En el LE hay explicaciones acerca del concepto de punto, recta y plano. Sin embargo en estas explicaciones se utilizan los conceptos de dirección, extensión, anchura, etc. ,que no están explicados.

En matemática no se pueden definir todos los términos, por lo que algunos se utilizan sin haberlos definido. Esta dificultad puede ser resuelta si se hace referencia a algunos axiomas que definan la característica de los objetos matemáticos y la relación entre ellos. Por esta razón en esta lección en lugar de tratar de explicar el concepto con palabras o hacer que los alumnos memoricen las explicaciones, en el LE se induce a que ellos puedan abstraer el concepto de punto, recta, etc., desde la imagen real dibujada. Por ejemplo, se les puede pedir que “imaginen que un punto dibujado en la pizarra con yeso se disminuye de tamaño más y más sin cambiar la posición”, lo que quedará es un punto. En esta lección basta que los estudiantes capten los conceptos intuitivamente.

Lección 2. Rayos y segmentos

Un segmento tiene la característica que entre todas las líneas que unen dos puntos éste tiene la mínima medida [C].

Si en una recta se fija un punto, éste divide la recta en dos partes opuestas llamadas semirrectas.

En el espacio dos puntos distintos determinan una y sólo una recta, lo cual significa que un tercer punto no necesariamente está en la recta. Si está, entonces se dice que estos tres puntos son colineales [F].

Desarrollo de clases

1. Explorar la idea de punto. [A y A1]

* El maestro coloca la mano como lo muestra la figura (1) y pide a los estudiantes que hagan lo mismo.

M: ¿Cuántas líneas representan los dedos?

RP: Dos, una, tres.

M: Dibujen esas tres líneas según la ubicación de los dedos.

* Los alumnos trazan (en su cuaderno y después en el pizarrón) las tres líneas tal como aparecen en la figura (2).

M: ¿Cómo se llama el lugar (señalándolo) donde empiezan las tres líneas?

RP: Rincón, esquina, punto.

* Interrogar a los estudiantes por qué le llaman punto.

* Concluir que un punto es el lugar donde se unen dos o más líneas. Dibujarlo y explicar que no tiene dirección ni extensión.

2. Explorar la idea de línea recta. [A2]

M: Si movemos un punto a través del borde de una regla, ¿Qué se formará?

* Mandar varios estudiantes a hacer esto a la pizarra.

RP: Una línea, una recta.

M: De ahora en adelante la llamaremos recta. ¿Qué es una recta?

RP: Un montón de puntos, una serie de puntos que siguen una misma dirección.

M: ¿Qué características tiene la recta?

RP: Es delgadita, bastante larga, no tiene fin.

Lección 1: (1/1) **Puntos, rectas y planos**

Objetivo:
- Explorar la noción intuitiva de punto, recta y plano.
- Designar y trazar puntos, rectas y planos.
- Dar ejemplos de objetos que sugieren la idea de punto, recta y plano.

Materiales: (M) Reglas y LE. (N) Reglas y LE.

Unidad 6 **Conjunto de puntos**

Lección 1: Puntos, rectas y planos

Sección 1: Puntos, rectas y planos

A La figura (1) muestra una mano con tres dedos extendidos hacia diferentes direcciones.



Figura (1)

En la figura (2) están representadas las tres direcciones con flechas.

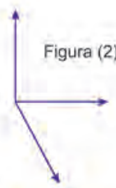


Figura (2)

1 La parte donde empiezan las flechas se llama punto. El punto representa una posición y no tiene ni dirección ni extensión.

2 Si un punto se mueve en una misma dirección dibuja una línea recta. Si el punto retrocediera en dirección opuesta a la trayectoria dada y se prolongara infinitamente completaría la línea recta. Una línea recta no tiene anchura o grosor, se extiende infinitamente en dos direcciones y no tiene extremos (Figura 3)

Figura (3)

Si se admite el cambio de dirección en la trayectoria del punto generalmente dibuja una línea (Figura 4).



Figura (4)

Notas: De aquí en adelante se utilizará la palabra "recta" cuando se hable de una línea recta.

3 **Si una recta se mueve hacia otra dirección dibuja un plano. El desplazamiento de la recta para formar el plano es igual al del punto para formar la recta. Un plano tiene 2 direcciones pero no tiene grosor (Figura 5).**



Figura (5)

Generalmente cuando una línea se mueve dibuja una superficie (Figura 6).



Figura (6)

* Concluir que una recta tiene únicamente dirección y que no tiene extremos ni grosor.

M: Ahora dibujen una línea pero sin usar regla, ¿qué figura trazaron?

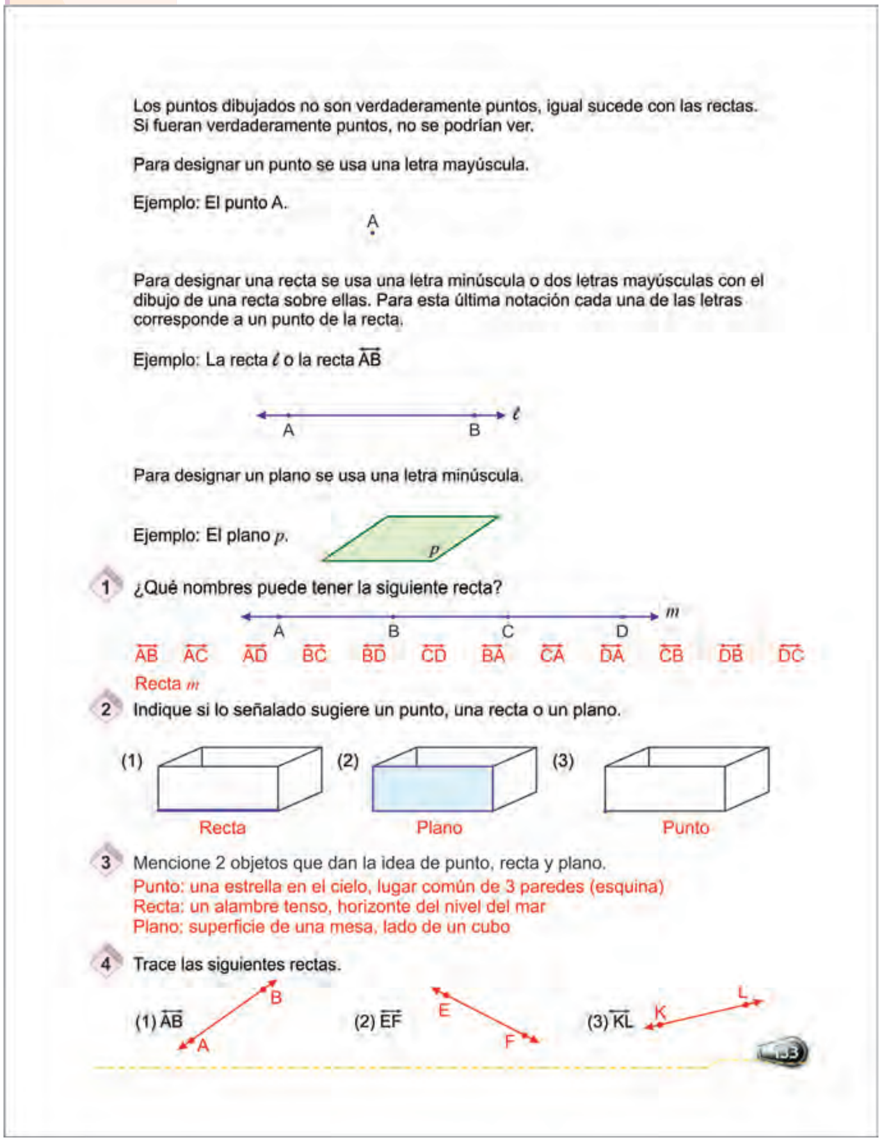
RP: Una curva, una línea.

* Concluir que si cambia la dirección lo que se traza es una línea (Figura 4).

Lección 1: (1/1)

Puntos, rectas y planos

[Continuación]



Los puntos dibujados no son verdaderamente puntos, igual sucede con las rectas. Si fueran verdaderamente puntos, no se podrían ver.

Para designar un punto se usa una letra mayúscula.

Ejemplo: El punto A.

Para designar una recta se usa una letra minúscula o dos letras mayúsculas con el dibujo de una recta sobre ellas. Para esta última notación cada una de las letras corresponde a un punto de la recta.

Ejemplo: La recta ℓ o la recta $\overleftrightarrow{AB}$

Para designar un plano se usa una letra minúscula.

Ejemplo: El plano p.

1 ¿Qué nombres puede tener la siguiente recta?

$\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{AC}$ $\overleftrightarrow{AD}$ $\overleftrightarrow{BC}$ $\overleftrightarrow{BD}$ $\overleftrightarrow{CD}$ $\overleftrightarrow{BA}$ $\overleftrightarrow{CA}$ $\overleftrightarrow{DA}$ $\overleftrightarrow{CB}$ $\overleftrightarrow{DB}$ $\overleftrightarrow{DC}$

Recta m

2 Indique si lo señalado sugiere un punto, una recta o un plano.

(1) Recta (2) Plano (3) Punto

3 Mencione 2 objetos que dan la idea de punto, recta y plano.

Punto: una estrella en el cielo, lugar común de 3 paredes (esquina)
Recta: un alambre tenso, horizonte del nivel del mar
Plano: superficie de una mesa, lado de un cubo

4 Trace las siguientes rectas.

(1) $\overleftrightarrow{AB}$ (2) $\overleftrightarrow{EF}$ (3) $\overleftrightarrow{KL}$

133

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior

3. Explorar la idea de plano. [A3]

M: Usando una recta, ¿cómo formaremos algo parecido a la superficie de esta mesa? (Señalarla).

RP: Copiando la recta un montón de veces, moviendo la recta en una sola dirección.

M: ¿Cómo se llama la figura que se forma?

RP: Plano, superficie.

* Concluir que se llama plano.

M: Dibujen un plano y díganme que características tiene.

* Concluir que un plano tiene dos direcciones pero no grosor (Figura 5).

M: Y si la recta se mueve en varias direcciones ¿qué se formará?

RP: Un plano curvo, una superficie (Figura 6).

4. Designar puntos, rectas y planos.

M: ¿Cómo haremos para nombrar puntos, rectas y planos?

* Concluir que el punto se designa con una letra mayúscula, la recta con una letra minúscula (ℓ) o dos letras mayúsculas de dos puntos de ella y sobre esas letras se dibuja una pequeña recta ($\overleftrightarrow{AB}$), y que para el plano se utiliza una letra minúscula (p).

5. Resolver 1 ~ 4.

1. Definir y designar un rayo.

M: Dibujen una recta y borren un pedazo de ella. ¿Qué queda?

RP: Otro pedazo de recta.

* Concluir que lo que queda se llama rayo y es una figura que comienza en un punto y se extiende en una sola dirección.

M: ¿Cómo haremos para nombrar un rayo?

* Concluir que el rayo AB se designa como $\overrightarrow{AB}$.

2. Definir y designar un segmento.

* Indicar que lo desarrollen en forma similar al rayo.

3. Definir y designar la longitud de un segmento.

M: ¿Qué entienden por longitud de un segmento? ¿Cómo se designa?

RP: Es lo que mide. Es la distancia entre los puntos extremos.

* Concluir que la longitud de un segmento es la distancia entre sus dos puntos extremos.

4. Determinar la longitud de un segmento que se divide en varias partes.

* Trazar un segmento con un punto intermedio y determinar la longitud como la suma de las longitudes de los dos segmentos pequeños.

5. Resolver 1.

6. Trazar y definir segmentos congruentes. [A]

* Desarrollar la construcción de [A] y comprobar con la regla graduada si los segmentos son congruentes. Con base en lo anterior definir la congruencia de segmentos y la forma de designarlos ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$).

Lección 2: (1/3) Rayos y segmentos

Objetivo:
- Definir segmento y rayo; y designarlos.
- Encontrar la longitud de un segmento.
- Definir la congruencia de segmentos.

Materiales: (M) Reglas, compás, hilo y LE. (N) Reglas, compás, hilo y LE.

Lección 2: Rayos y segmentos

Sección 1: Rayos y segmentos

Un **rayo** es una parte de la recta que comienza en un punto dado y que se extiende en forma ilimitada en una dirección.

Un rayo se designa por medio de dos letras mayúsculas y sobre ellas se dibuja un rayo pequeño. La primera letra corresponde al punto donde comienza el rayo y la segunda es otro punto cualquiera del rayo.

A B

$\overrightarrow{AB}$ (Rayo $\overrightarrow{AB}$)

Un **segmento** es una parte de la recta entre dos puntos.

Se designa un segmento por medio de dos letras mayúsculas que señalan los extremos del segmento y sobre ellas se dibuja un segmento pequeño.

A B

$\overline{AB}$ (segmento $\overline{AB}$)

Un segmento tiene longitud. La longitud del segmento $\overline{AC}$ se designa por AC. Si se divide un segmento en varias partes, su longitud es igual a la suma de la longitud de sus partes. La longitud del segmento $\overline{AC}$ es igual a la suma de las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Lo anterior se escribe como AC = AB + BC.

A B C

Notas: Es importante hacer la distinción entre $\overline{AB}$ y AB. $\overline{AB}$ designa un conjunto de puntos y AB representa un número.

1 Trace segmentos cuyas longitudes sean las siguientes.

(1) 5 cm (2) 2 cm (3) 6.5 cm (4) 2.9 cm

se omite la solución

A Trace utilizando regla y compás el segmento $\overline{CD}$ que tenga la misma longitud que el segmento $\overline{AB}$ de la derecha.

A B

Paso 1 C — Se traza con la regla un segmento y se coloca el punto C sobre él.

Paso 2 C D — Se hace coincidir los extremos del compás con los puntos A y B y con esa misma abertura se traza un arco con centro en C que corte al segmento en el punto D.

Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma longitud se dice que son **congruentes** y se escribe $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Continúa en la siguiente página...

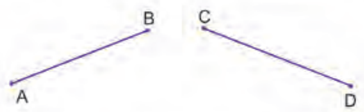
Lección 2: **(1/3)** **Rayos y segmentos**

[Continuación]

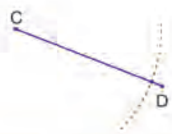
Objetivo:

Materiales:

B Compare las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con el compás.



Se hace coincidir los extremos del compás con los puntos A y B y con la misma abertura se traza un arco con centro en C de forma que pase cerca o sobre el punto D.



De esto se deduce que:

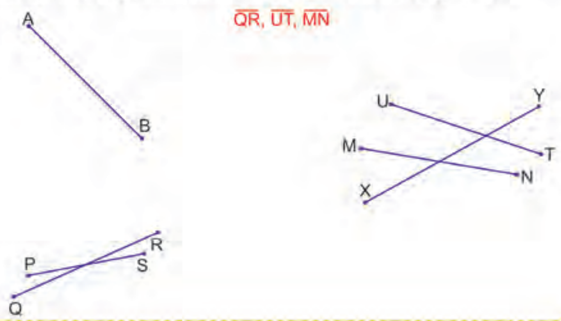
(1) Si el punto D está en el exterior de la circunferencia, el segmento $\overline{CD}$ es de mayor longitud que el segmento $\overline{AB}$.

(2) Si el punto D está en la circunferencia, el segmento $\overline{CD}$ es de la misma longitud que el segmento $\overline{AB}$.

(3) Si el punto D está en el interior de la circunferencia, el segmento $\overline{CD}$ es de menor longitud que el segmento $\overline{AB}$.

2 Encuentre los segmentos que son congruentes con el segmento $\overline{AB}$.

$\overline{QR}$, $\overline{UT}$, $\overline{MN}$



... viene de la página anterior.

7. Comparar dos segmentos. [B]

* Dibujar en la pizarra 2 segmentos y compararlos siguiendo las instrucciones dadas en [B].

* Puede utilizar hilo en caso de no contar con compás.

* Mostrar los tres casos en los cuales uno de ellos sea menor, igual o mayor que el otro.

M: ¿Qué deducen de los tres casos anteriores?

* Comparar las respuestas con las tres conclusiones del LE.

8. Resolver 2.

Lección 2: (2/3) Rayos y segmentos

Objetivo: • Definir la distancia de un segmento y su punto medio.

Materiales: (M) Reglas, compás, hilo y LE.
(N) Reglas, compás, hilo y LE.

1. Definir la distancia de un segmento. [C]

* Desarrollar el experimento mostrado en [C].

M: ¿Cuál es la longitud del hilo y del segmento?

RP: (Dependen de las longitudes mostradas).

M: ¿Habrá una longitud menor que la del segmento?

RP: Quizás. No.

* Concluir que no hay una longitud menor y que a la longitud del segmento se le llama distancia del segmento.

2. Definir el punto medio de un segmento. [D]

* Dibujar en el pizarrón un segmento idéntico al mostrado en [D]. Asegúrese que B sea el punto medio.

M: Midan la distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. ¿Qué pueden decir?

RP: Las distancias son iguales, miden lo mismo, son congruentes.

M: Entonces, ¿qué pueden decir de B?

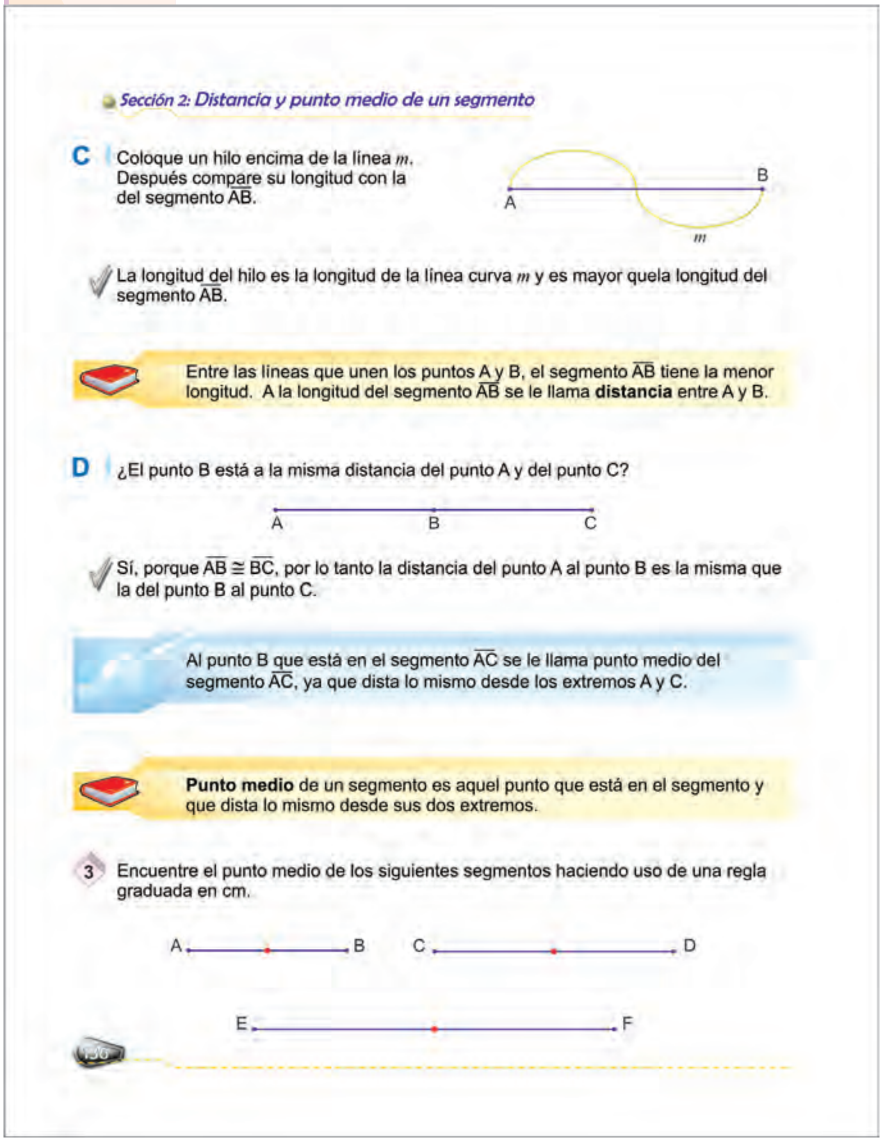
RP: Que B está de medio a medio, que B está en el centro, que B es el punto medio.

M: ¿Por qué B es el punto medio de este segmento?

RP: Porque $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

* Leer el resumen del LE.

3. Resolver 3.



Sección 2: Distancia y punto medio de un segmento

C Coloque un hilo encima de la línea *m*. Después compare su longitud con la del segmento $\overline{AB}$.

La longitud del hilo es la longitud de la línea curva *m* y es mayor que la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Entre las líneas que unen los puntos A y B, el segmento $\overline{AB}$ tiene la menor longitud. A la longitud del segmento $\overline{AB}$ se le llama **distancia** entre A y B.

D ¿El punto B está a la misma distancia del punto A y del punto C?

Sí, porque $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, por lo tanto la distancia del punto A al punto B es la misma que la del punto B al punto C.

Al punto B que está en el segmento $\overline{AC}$ se le llama punto medio del segmento $\overline{AC}$, ya que dista lo mismo desde los extremos A y C.

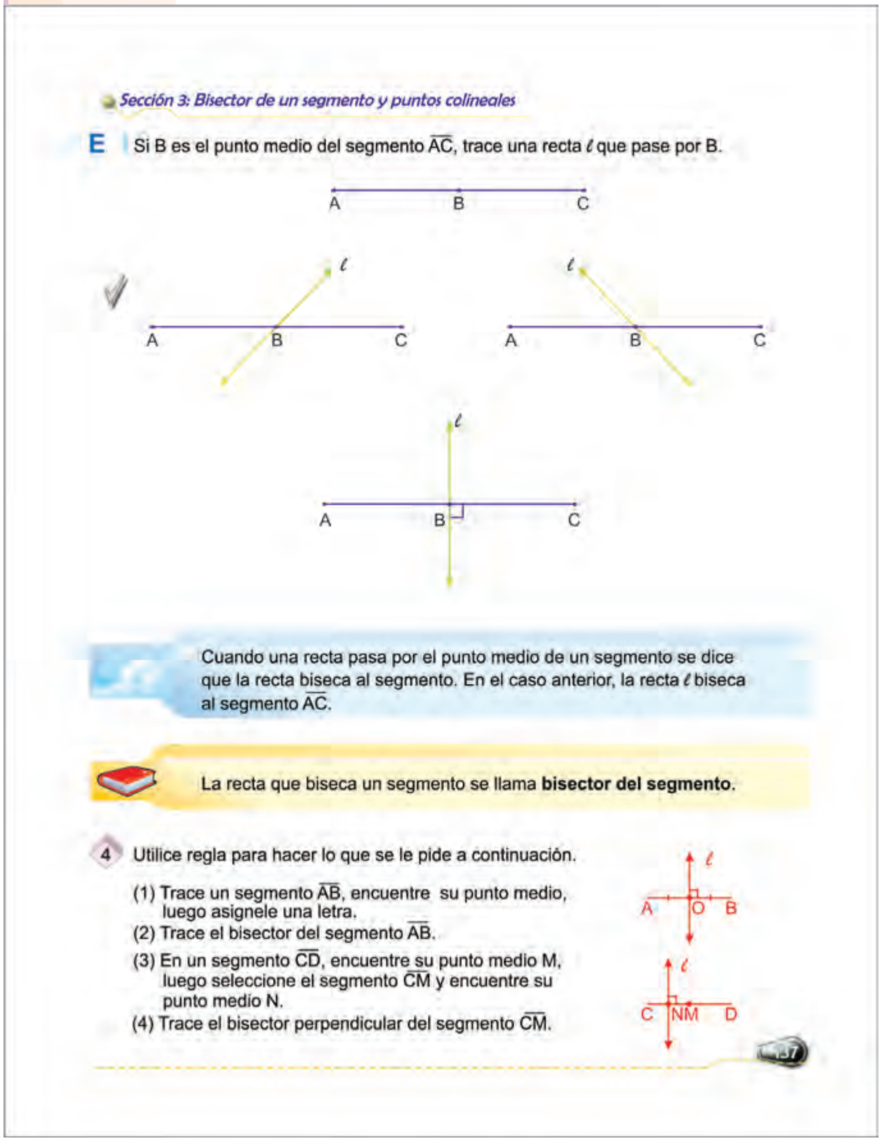
Punto medio de un segmento es aquel punto que está en el segmento y que dista lo mismo desde sus dos extremos.

3 Encuentre el punto medio de los siguientes segmentos haciendo uso de una regla graduada en cm.

Lección 2: (3/3) Rayos y segmentos

Objetivo:
- Definir y trazar el bisector de un segmento.
- Definir puntos colineales.

Materiales: (M) Reglas y GD.
(N) Reglas y LE.



Sección 3: Bisector de un segmento y puntos colineales

E Si B es el punto medio del segmento $\overline{AC}$, trace una recta ℓ que pase por B.

Cuando una recta pasa por el punto medio de un segmento se dice que la recta biseca al segmento. En el caso anterior, la recta ℓ biseca al segmento $\overline{AC}$.

La recta que biseca un segmento se llama **bisector del segmento**.

4 Utilice regla para hacer lo que se le pide a continuación.

(1) Trace un segmento $\overline{AB}$, encuentre su punto medio, luego asígnele una letra.
(2) Trace el bisector del segmento $\overline{AB}$.
(3) En un segmento $\overline{CD}$, encuentre su punto medio M, luego seleccione el segmento $\overline{CM}$ y encuentre su punto medio N.
(4) Trace el bisector perpendicular del segmento $\overline{CM}$.

137

1. Trazar rectas que pasen por el punto medio de un segmento. [E]

M: ¿Qué es punto medio de un segmento?

RP: Es el que está a igual distancia de sus extremos.

* Dibujar tres o cuatro segmentos y marcar sus puntos medios.
* Pedir a los estudiantes que tracen rectas que pasen por los puntos medios de los segmentos.

M: ¿Cómo se llaman estas rectas y en cuántas partes dividen el segmento?

RP: Mediatrices, bisectrices, bisectores. En dos partes iguales.

* Concluir que las rectas se llaman bisectores y dividen el segmento en dos partes iguales.

2. Resolver 4.

* En (2) encontrar la mitad de la mitad del segmento.
* Verificar que el alumno rotule con letra mayúscula los puntos.
* Verificar que las rectas trazadas por los alumnos posean las flechas y esten rotuladas debidamente.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

3. Resolver el ejemplo. [F]

* Con la ayuda de una regla que tracen una recta que pase por los puntos dados.

M: ¿En cuál de los incisos fue posible trazarla? ¿Por qué?

RP: En (a) porque los puntos están alineados.

M: Si están en la misma línea, ¿cómo se les llama a esos puntos?

RP: Alineados, colineales.

* Concluir que los puntos se llaman colineales.

4. Resolver 5 y 6.

* En 5 es preferible que no utilicen la regla, salvo si hay problemas en identificar los puntos que son colineales.

Lección 2: (3/3) Rayos y segmentos

[Continuación]

F En cada uno de los siguientes dibujos intente trazar una recta que pase por los tres puntos dados.

(1) A B C (2) D E F

(1) A B C (2) No se puede.

Cuando tres puntos están en la misma recta se les llama puntos colineales. En el caso (1) los puntos A, B y C son colineales.

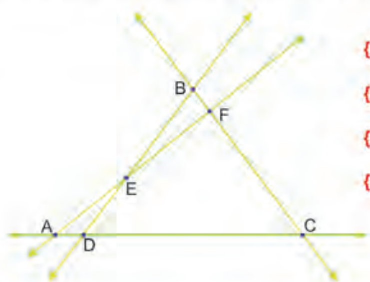
Si tres o más puntos están en una recta, éstos son **puntos colineales**.
Dos puntos siempre están en una y solamente una recta.
Más de dos puntos no necesariamente son colineales.

5 Agrupe tres puntos que sean colineales. ¿Cuántos grupos hay?



Hay 4 grupos

6 Haga la lista de los conjuntos de puntos que son colineales en la figura de abajo.



{A, E, F}
{A, D, C}
{D, E, B}
{B, F, C}

Unidad 6: (1~2/2)

Conjunto de puntos

Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre puntos, rectas, planos, segmentos y rayos.

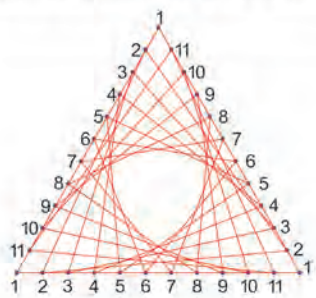
Materiales:

Ejercicios

1. ¿Cuántas rectas determinan 4 puntos donde no hay 3 colineales?
   6 rectas
2. ¿Qué objetos nos dan la idea de punto, recta y plano?
   Punta de un lápiz, borde de una regla, hoja de papel sin ajar.
3. ¿Por qué una linterna encendida y dirigida a lo alto nos proporciona la idea de rayo?
   La luz sale de un punto y sigue al infinito.
4. Construya 2 segmentos congruentes que midan:
   (1) 6 cm (2) 3.5 cm (3) 7 cm
   se omite la solución
5. Si se biseca un segmento de 7 cm, ¿cuánto mide cada uno de los segmentos resultantes?
   PO: 7 ÷ 2 = 3.5 R: 3.5 cm.
6. ¿Cuántas rectas determinan 4 puntos colineales?
   1 recta
7. Encuentre los grupos de tres puntos que son colineales y trace la recta que los contiene.



8. Una con un segmento los puntos que tienen el mismo número.



139

1. Resolver 1 ~ 14

Tipos de ejercicios:

1 Trazado de rectas

2 Conceptos de punto, recta y plano

3 Concepto de rayo

4 Construcción de segmentos congruentes

5 Bisector

6 ~ 7 Rectas y puntos colineales

8 Trazado de segmentos

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

Unidad 6: (1~2/2)

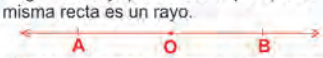
Conjunto de puntos

[Continuación]

9
(1) Si AB = 7 y BC = 10, ¿necesariamente AC = 17? Explique la respuesta. **No**
(2) Si AB = 20, BC = 10 y AC = 30, ¿qué se sabe sobre los puntos A, B y C? **Son colineales**
(3) Si A, B y C son colineales, AB = 13 y BC = 8, ¿es AC necesariamente 21? **No**
(4) Si AB = 14, BC = 14 y AC = 28, ¿es B el punto medio del segmento $\overline{AC}$? **Sí**

10 Encuentre la medida que falta si B está entre A y C.
(1) AB = 8, BC = 16 y AC = **24**
(2) AB = 11, BC = **20** y AC = 31
(3) AB = **23**, BC = 17 y AC = 40

11 Haga un dibujo para mostrar por qué es falso que la unión de dos rayos en una misma recta es un rayo.



Ambos rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ forman la recta $\overleftrightarrow{AB}$

12 ¿Tiene punto medio la recta? Explique por qué sí o por qué no.
No, porque tiene la medida indeterminada, ésta es infinita.

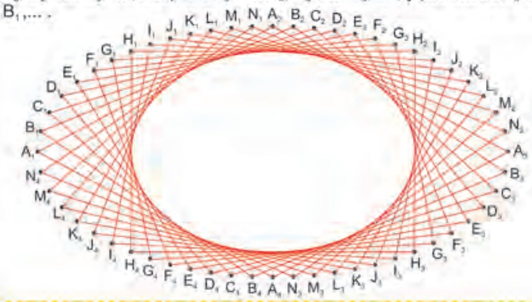
¿Tiene punto medio el rayo? Explique por qué sí o por qué no.
No, por la misma razón anterior.

13 Redacte una frase donde utilice la palabra dada.

(1) Distancia
(2) Punto
(3) Punto medio
(4) Colineales
(5) Rayo
(6) Recta
(7) Segmento
(8) Plano
(9) Bisector

Se omite la solución

14 Una con un segmento los puntos correspondientes: A_1 con A_2, B_1 con B_2, ... , luego A_2 con A_3, B_2 con B_3, ... , después A_3 con A_4, B_3 con B_4, ... , y por último A_4 con A_1, B_4 con B_1, ...



Conjunto de puntos

Evaluación de la unidad

1. Resolver 1 ~ 3.

Evaluación

1 Encierre en círculo la letra del inciso que hace correcta la proposición dada.

(1) Sugiere la idea de un plano.
1) un balón (2) un ladrillo mosaico 3) el tendido eléctrico 4) una estrella

(2) No tiene área, longitud ni grosor.
1) recta 2) plano (3) punto 4) segmento

(3) Se prolonga indefinidamente en una sola dirección.
1) recta 2) segmento 3) plano (4) rayo

(4) Tiene la distancia mínima entre dos puntos diferentes.
(1) segmento 2) línea curva 3) línea quebrada 4) línea mixta.

(5) Parte de una recta entre dos puntos.
1) rayo (2) segmento 3) plano 4) ángulo

2 Escriba si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

(1) Tres puntos no colineales determinan tres rayos. (F)
(2) Dos segmentos congruentes son iguales. (F)
(3) Un segmento tiene un único punto medio. (V)
(4) Si AB = 5 y BC = 7 y AC = 12 entonces el punto B está entre A y C. (V)
(5) Dado un segmento $\overline{AB}$ entonces AB = BA. (V)

3 Haga lo que se le pide. **Se omite la solución**

(1) Dibuje 3 objetos que ilustren la idea de plano.
(2) Dibuje 5 rectas diferentes que pasen por un punto A.
(3) Trace 3 segmentos cuyas medidas sean 4.9 cm, 8 cm y 6.5 cm.
(4) Trace 5 puntos colineales (A, B, C, D y E) de modo que AB = 2 cm, AC = 5 cm, BD = 5 cm y DE = 2.5 cm.
(5) Trace los puntos medios de los segmentos de (3).
(6) ¿A qué distancia de los extremos está el punto medio de los segmentos encontrados en (5)?

Unidad 7

Ángulos

(19 horas)

1 Expectativas de logro

- Operan con ángulos y sus relaciones con líneas.
- Reconocen y miden ángulos en la vida real.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector
- Puntos colineales

Ángulos
- Definición de ángulos
- Congruencia de ángulos
- Clasificación
- Construcciones
- Bisectriz
- Perpendicularidad
- Mediatriz
- Paralelismo

Octavo grado

Triángulos
- Suma ángulos de triángulos
- Suma de ángulos de polígonos
- Congruencia de triángulos
- Triángulo isósceles y rectángulo
- Puntos notables del triángulo

Cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza
- Rectas paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del Teorema de Pitágoras
- Aplicación del Teorema de Pitágoras

Noveno grado

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Suma de ángulos internos de un polígono regular
- Círculos
- Tangentes
- Área de círculos
- Centro de un polígono regular
- Polígonos regulares y el círculo.

Sólidos geométricos
- Áreas de superficies laterales de paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas
- Volumen de pirámides, cono, cilindro y esfera

③ Plan de estudio (19 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Ángulos (2 horas)	1/2	• Definición de ángulo, medida y congruencia.
	2/2	• Clasificación de ángulos
2. Construcción de ángulos (2 horas)	1/2	• Construcción de ángulos congruentes
	2/2	• Construcción de la bisectriz
3. Perpendicularidad (4 horas)	1/4	• Rectas, definición y construcción de línea perpendicular • Definición de mediatriz
	2/4	• Construcción de la mediatriz
	3~4/4	• Construcción de una perpendicular usando la definición de mediatriz.
4. Paralelismo (9 horas)	1/9	• Rectas paralelas y transversales
	2/9	• Ángulos formados por dos rectas y una transversal
	3/9	• Congruencia de ángulos correspondientes y ángulos alternos internos entre rectas paralelas
	4/9	• Ejercicios sobre paralelismo
	5/9	• Distancia entre rectas paralelas
	6/9	• Demostraciones sobre paralelismo
	7~8/9	• Construcción de rectas paralelas
	9/9	• Construcción de rectas paralelas y perpendiculares
Ejercicios de la unidad (2 horas)	1~2/2	
Evaluación	(No hay horas)	

Puntos de lección

Lección 1. Ángulos

En la primaria los estudiantes aprendieron la definición de ángulos, la unidad de medida "grado", el uso del transportador y algunos conceptos sobre ángulos. También aprendieron que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes pero no la razón. En **A4** y en lo que sigue está dada la explicación.

En este grado por primera vez los estudiantes conocerán la forma de deducción en geometría, que es una de las metas de la enseñanza de esta rama de las matemáticas en este nivel. Asimismo se dará una idea intuitiva acerca de figuras y espacios.

Lección 2. Construcción de ángulos

En geometría la construcción de figuras significa dibujarlas sólo con regla y compás. Se usa la regla para trazar una recta que une dos puntos dados y el compás para trazar una circunferencia de centro y radio dado. En esta unidad se realizan dos construcciones [**B**] y [**C**].

Nota: Según el DCNEB en séptimo grado el término "ángulos adyacentes" se utiliza en el sentido de "ángulos consecutivos", pero en el LE se mantiene la definición dada en cuarto grado que dice que "dos ángulos son consecutivos si la suma de sus medidas es 180º".

Lección 3. Perpendicularidad

Los estudiantes aprendieron el concepto de perpendicularidad en tercer grado y conocen algunas propiedades de la mediatriz a través del aprendizaje de la simetría.

Para abordar el tema de la perpendicularidad se hacen varias construcciones:

(1) Construir una recta perpendicular a una recta dada interceptándola en un punto dado sobre la recta [**A**].

Vale la pena intentar que los estudiantes inventen la manera de construirla. Puede sugerírseles que consideren la bisectriz del ángulo llano.

(2) Construir la mediatriz de un segmento [**C**].

Antes de hacer esta construcción es necesario investigar la propiedad de la mediatriz que dice que cada punto en la mediatriz mide lo mismo desde los dos extremos del segmento [**B**]. Utilizando esta propiedad se construye la mediatriz, es decir, construir dos puntos (C y D) donde cada uno de ellos diste lo mismo desde los dos extremos del segmento para luego trazar la recta que pasa por estos dos puntos. Éste también es el procedimiento para encontrar el punto medio de un segmento.

(3) Construir una recta perpendicular a una recta dada a través de un punto exterior a la recta [**D**].

Para utilizar la manera vista en [**C**] primero se corta un segmento cuyos extremos disten lo mismo del punto exterior a la recta dada.

Una propiedad importante de la perpendicularidad es que dada una recta y un punto externo, la perpendicular que pasa por dicho punto da el camino más corto entre el punto y la recta.

La distancia entre un punto y una recta es la medida del segmento perpendicular a la recta que une ésta con el punto. Con este concepto se puede considerar una mediatriz como un conjunto de puntos que distan lo mismo de ambos extremos del segmento.

Lección 4. Paralelismo

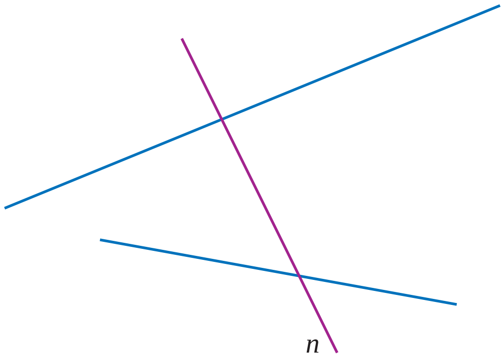
La definición de paralelismo de dos rectas es que no se cortan. Esta definición tiene la desventaja que no se puede probar. Un criterio práctico para probar el paralelismo es trazar una transversal y determinar la igualdad de los ángulos correspondientes o de los ángulos alternos internos. Esta propiedad ya es familiar a los estudiantes porque en los grados anteriores aprendieron la manera de trazar líneas paralelas con escuadras, por lo tanto es preferible inducirlos de modo que hallen esta propiedad antes de aprenderla.

Columnas

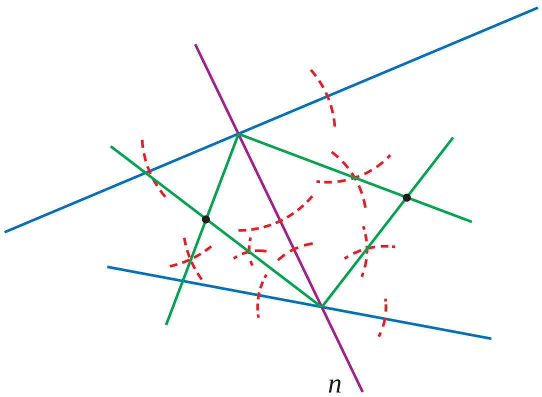
Las construcciones de los ejercicios 9 y 10 planteados en los ejercicios de la unidad 7 (pág. del LE 162) se desarrollan a continuación.

Resolver 9 .

1. Trace una transversal n.

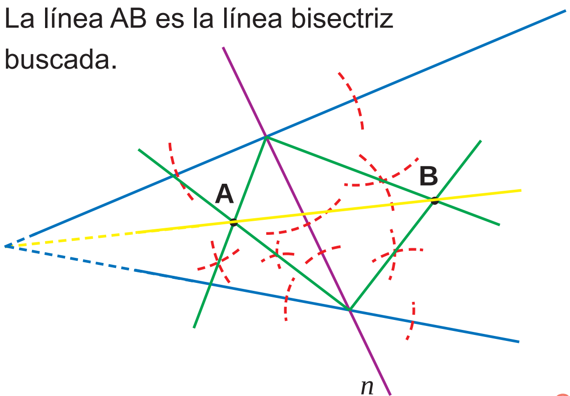


2. Trace las bisectrices de los ángulos internos.



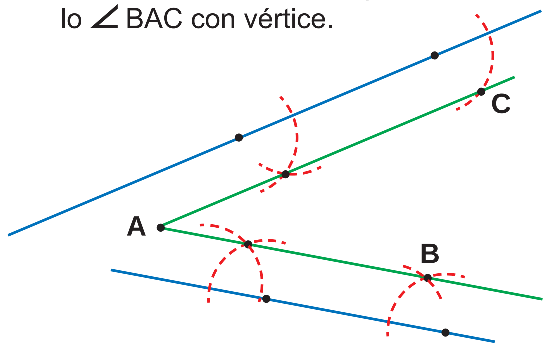
3. Una el punto A y B (el punto A es la intersección de las dos bisectrices de los ángulos que están a un lado de la transversal y el punto B es la intersección de las otras dos bisectrices).

4. La línea AB es la línea bisectriz buscada.

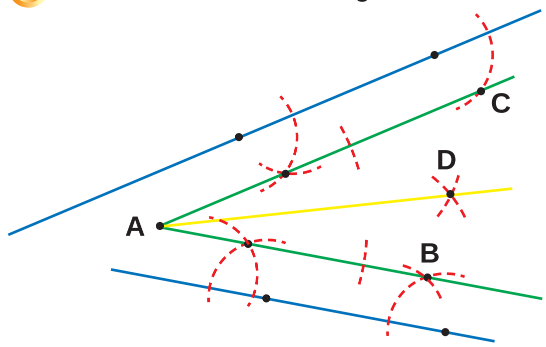


Resolver 10 .

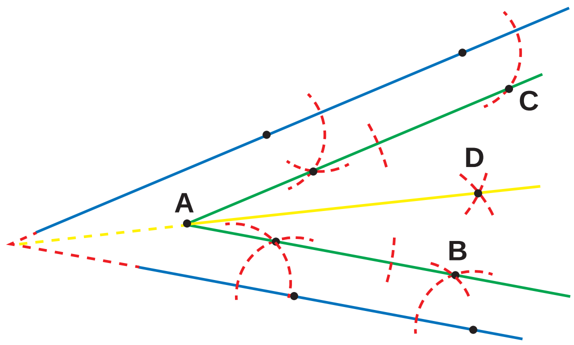
1. Trace dos rectas paralelas y a la misma distancia a los lados dados para formar un ángulo ∠BAC con vértice.



2. Trace la bisectriz del ángulo ∠BAC.



3. La línea AD es la línea bisectriz buscada.



5 Desarrollo de clases

1. Definir y designar un ángulo.

M: ¿Qué es un ángulo?

RP:Unión de dos líneas, unión de dos rayos con extremos comunes, abertura entre dos rayos.

* Pedir que dibujen las situaciones expresadas y discutan sobre las definiciones incorrectas y la correcta.

M: ¿Cómo se designa un ángulo?

RP: Con un ángulo pequeño y una letra mayúscula, con tres letras mayúsculas.

* Concluir sobre las diferentes formas de designar un ángulo según el LE.
* Dar ejemplos de ángulos, designarlos e identificar sus elementos.

2. Recordar el procedimiento para medir ángulos.

M: ¿Cuál es la unidad de medida de los ángulos?

RP: El metro, los centímetros, el grado.

* Concluir que es el grado (º) y ejemplificar su escritura.
* Concluir que el ángulo central de un círculo mide 360º.

M: ¿Qué instrumento utilizamos para medir ángulos?

RP: Compás, transportador, la regla.

* Concluir que es el transportador.

M: Muéstrenme cómo se mide un ángulo.

* Los estudiantes muestran el modo de usar el transportador.
* Discutir todas las formas mostradas y explicar por qué están equivocadas o son correctas.

3. Medir ángulos.

* Trazar ángulos con diversas aberturas y medirlos utilizando el transportador. Que dos ángulos sean congruentes para recordar su definición.

Lección 1: (1/2) **Ángulos**

Objetivo:
• Definir y designar ángulos.
• Medir y construir ángulos utilizando el transportador.

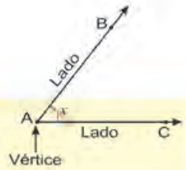
Materiales: (M) Reglas, transportador y LE. (N) Reglas, transportador y LE.

Unidad 7 **Ángulos**

Lección 1: Ángulos

Sección 1: Definición de ángulo, medida y congruencia

La definición de ángulo y los temas fundamentales sobre éste se estudiaron en los grados anteriores.



Un ángulo es la abertura que forman dos rayos ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) que tienen un extremo común (punto A). Al punto A se le llama **vértice** y a los rayos **lados**.

El ángulo anterior se puede designar de varias maneras: ∠ A, ∠ BAC, ∠ CAB o ∠ x.

Notas: En muchas situaciones se llama ángulo aún cuando está compuesto por segmentos en lugar de rayos. Ejemplo: Los tres ángulos de un triángulo. En este caso se entiende que se prolongan los segmentos para ser rayos.

La unidad de medida universal para el ángulo es el grado y se utiliza el signo "º". Ejemplo: Noventa grados se expresa como 90º.

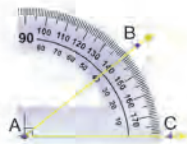
El ángulo central de un círculo mide 360º. Para medir y/o trazar ángulos de determinada medida se usa el transportador.

La forma de medir un ángulo.

(1) Colocar y mantener el transportador con el centro en el vértice A del ángulo.

(2) Girar la marca 0º hasta el lado $\overrightarrow{AC}$ del ángulo.

(3) Localizar en el transportador el número por donde pasa el otro lado $\overrightarrow{AB}$. Este número es la medida del ángulo ∠ BAC.



Para expresar que la medida del ángulo ∠A es 40º se escribe m∠A = 40º.

Dos ángulos que tienen la misma medida son **ángulos congruentes**.

Ejemplo: Si los ángulos ∠A y ∠B tienen la misma medida, se dice que son congruentes y se escribe ∠A ≅ ∠B.

Notas: Hay dos formas de expresar que los ángulos ∠A y ∠B tienen la misma medida:

(1) m∠A = m∠B
(2) ∠A ≅ ∠B.

4. Trazar ángulos dada su medida.

* Explicar la forma correcta de colocar el transportador para construir ángulos dadas sus medidas.

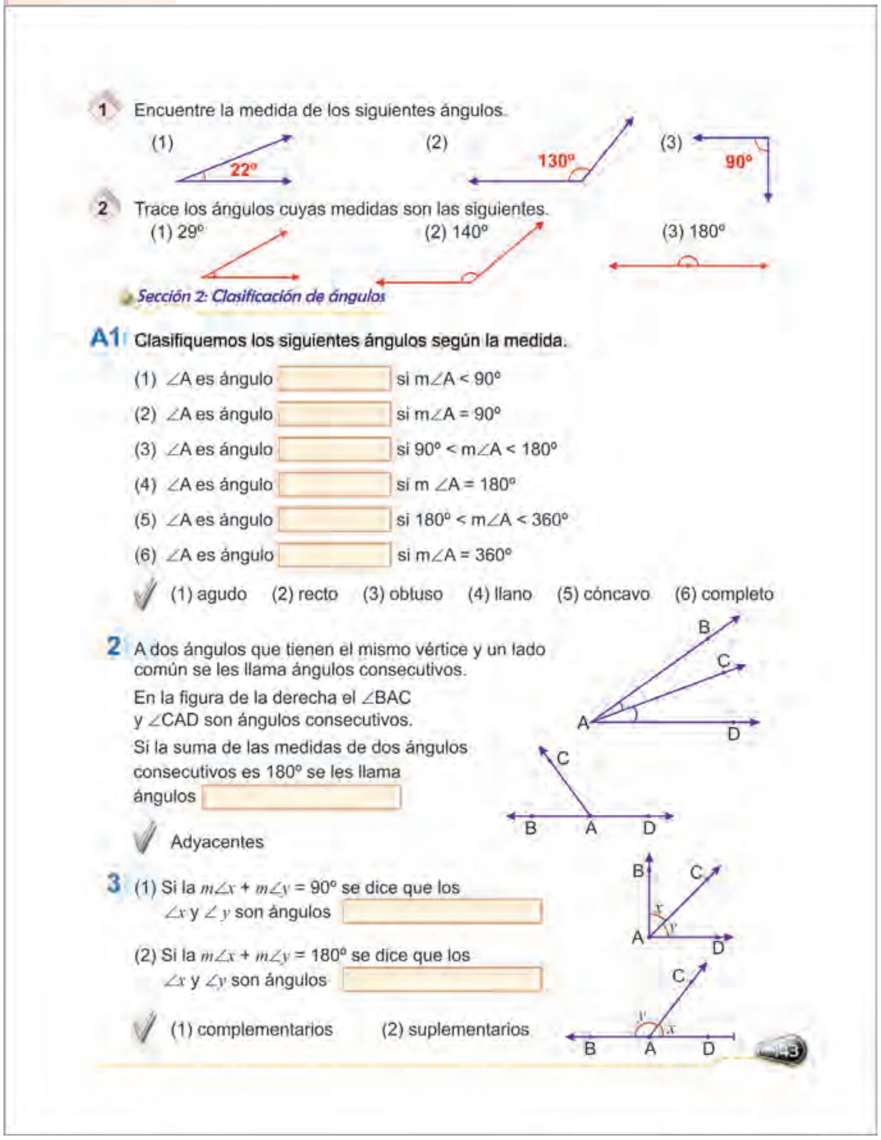
Continúa en la siguiente página...

Lección 1: (1/2) **Ángulos**

[Continuación]

Objetivo: (2/2)
- Clasificar ángulos según su medida.
- Encontrar la medida de los ángulos formados por dos rectas que se cortan en un punto, dada la medida de uno de ellos.

Materiales: (M) Reglas y LE. (N) Reglas y LE.



1 Encuentre la medida de los siguientes ángulos.

(1) 22° (2) 130° (3) 90°

2 Trace los ángulos cuyas medidas son las siguientes.

(1) 29° (2) 140° (3) 180°

Sección 2: Clasificación de ángulos

A1 Clasifiquemos los siguientes ángulos según la medida.

(1) ∠A es ángulo [ ] si m∠A < 90°

(2) ∠A es ángulo [ ] si m∠A = 90°

(3) ∠A es ángulo [ ] si 90° < m∠A < 180°

(4) ∠A es ángulo [ ] si m ∠A = 180°

(5) ∠A es ángulo [ ] si 180° < m∠A < 360°

(6) ∠A es ángulo [ ] si m∠A = 360°

✓ (1) agudo (2) recto (3) obtuso (4) llano (5) cóncavo (6) completo

2 A dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común se les llama ángulos consecutivos.

En la figura de la derecha el ∠BAC y ∠CAD son ángulos consecutivos.

Si la suma de las medidas de dos ángulos consecutivos es 180° se les llama ángulos [ ]

✓ Adyacentes

3 (1) Si la $m\angle x + m\angle y = 90°$ se dice que los $\angle x$ y $\angle y$ son ángulos [ ]

(2) Si la $m\angle x + m\angle y = 180°$ se dice que los $\angle x$ y $\angle y$ son ángulos [ ]

✓ (1) complementarios (2) suplementarios

5. Resolver 1 **y** 2 **.**

[Hasta aquí 1/2]

[Desde aquí 2/2]

1. Clasificar ángulos según la medida. [A1]

M: Según la medida de los ángulos qué palabras van en las casillas.

* Concluir sobre la clasificación de los ángulos y dibujarlos.

2. Definir ángulos adyacentes. [A2]

M: Lean lo referente a ángulos consecutivos.

M: ¿Cuál es la diferencia entre 2 ángulos consecutivos y 2 adyacentes?

RP: Los consecutivos no miden 180º y los adyacentes sí. Los consecutivos no necesariamente miden 180º. Todos los adyacentes son consecutivos pero no todos los consecutivos son adyacentes.

* Mostrar con dibujos si las diferencias expresadas por los estudiantes son correctas.

* Concluir con la definición dada en el LE y escribir la palabra que falta en la casilla.

3. Definir ángulos complementarios y suplementarios. [A3]

M: ¿Cuánto es la suma del ángulo A y el ángulo B?

RP: 90º

* Concluir que si la suma de dos ángulos es 90º éstos son complementarios.

* Llenar la casilla.

* Dibujar varios ángulos complementarios.

M: ¿Cuánto es la suma del ángulo A y el ángulo B?

RP: 180º

* Concluir que si la suma de dos ángulos es 180º éstos son suplementarios.

* Llenar la casilla.

* Dibujar varios ángulos suplementarios.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

4. Definir ángulos opuestos por el vértice. [A4]

M: Dibujen dos rectas que se corten en un punto y nombren los 4 ángulos que se forman.

M: ¿Qué parejas de ángulos son opuestos por el vértice?

RP: ∠ a y ∠ b; ∠ a y ∠ c; ∠ b y ∠ c; ∠ b y ∠ d.

* Discutir las respuestas mostrando las parejas señaladas y confrontándolas con el significado de “opuesto” y “vértice”.
* Concluir que los ángulos opuestos por el vértice son ∠ a y ∠ c; ∠ b y ∠ d.

5. Encontrar la medida de los ángulos que faltan.

M: Si el ∠ a mide 40º. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

* Inducir a los estudiantes para que encuentren las medidas utilizando los conocimientos previos.

RP: m ∠ b = 140º, m ∠ c = 40º y m ∠ d = 140º.

M: ¿Por qué esas respuestas?

RP: Porque los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo y los otros son adyacentes.

* Llamar demostración a este tipo de razonamiento.
* Discutir las demostraciones del LE analizando cada uno de los pasos.
* Discutir cada una de las razones y explicar aquellos pasos que parecen muy obvios pero que son difíciles de percibir por los estudiantes.

6. Resolver 3.

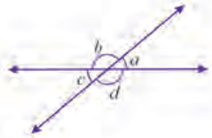
Lección 1: (2/2)

Ángulos

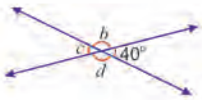
[Continuación]

4 En la gráfica se cortan dos rectas y aparecen dos pares de ángulos ______.

✓ opuestos por el vertice



Si $m\angle a = 40º$, ¿cuánto miden los ángulos b, c y d?



$m\angle b = 180º - m\angle a$
$= 180º - 40º$
$= 140º$

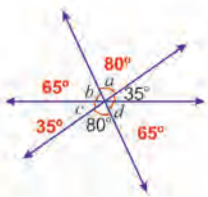
$m\angle c = 180º - m\angle b$
$= 180º - 140º$
$= 40º$

$m\angle d = 180º - m\angle c$
$= 180º - 40º$
$= 140º$

De la figura anterior se sabe que $m\angle a + m\angle b = 180º$ y la $m\angle b + m\angle c = 180º$ por lo tanto $m\angle a = 180º - m\angle b = m\angle c$, concluyendo que el ángulo $\angle a$ tiene la misma medida que el ángulo $\angle c$. De esta forma se puede decir que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. De la misma manera se puede mostrar que $m\angle b = m\angle d$.

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

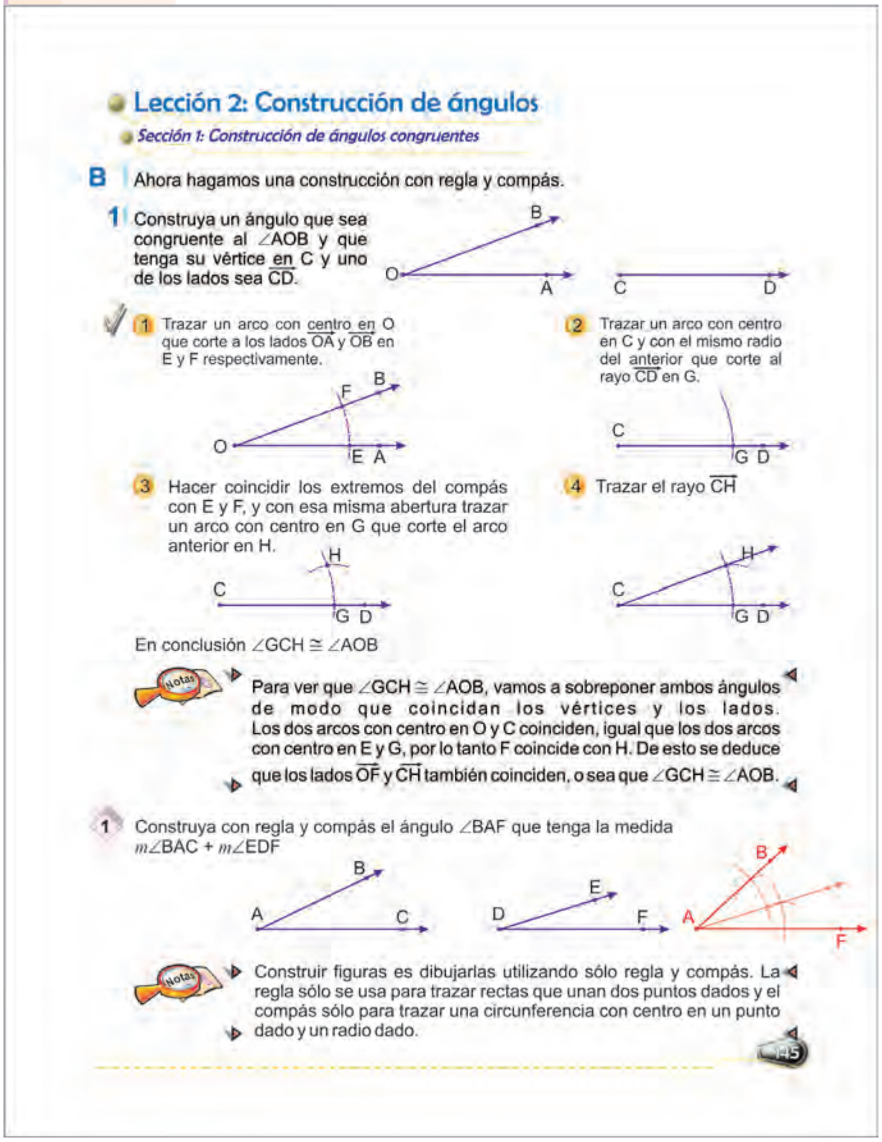
3 Encuentre las medidas de los $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ y $\angle d$.



Lección 2: (1/2) Construcción de ángulos

Objetivo: • Construir un ángulo congruente a un ángulo dado.

Materiales: (M) Regla, compás, lámina con la construcción del LE y LE. (N) Regla, compás y LE.



Lección 2: Construcción de ángulos

Sección 1: Construcción de ángulos congruentes

B Ahora hagamos una construcción con regla y compás.

1 Construya un ángulo que sea congruente al ∠AOB y que tenga su vértice en C y uno de los lados sea $\overline{CD}$.

(1) Trazar un arco con centro en O que corte a los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ en E y F respectivamente.

(2) Trazar un arco con centro en C y con el mismo radio del anterior que corte al rayo $\overline{CD}$ en G.

(3) Hacer coincidir los extremos del compás con E y F, y con esa misma abertura trazar un arco con centro en G que corte el arco anterior en H.

(4) Trazar el rayo $\overline{CH}$

En conclusión ∠GCH ≅ ∠AOB

Notas: Para ver que ∠GCH ≅ ∠AOB, vamos a sobreponer ambos ángulos de modo que coincidan los vértices y los lados. Los dos arcos con centro en O y C coinciden, igual que los dos arcos con centro en E y G, por lo tanto F coincide con H. De esto se deduce que los lados $\overline{OF}$ y $\overline{CH}$ también coinciden, o sea que ∠GCH ≅ ∠AOB.

1 Construya con regla y compás el ángulo ∠BAF que tenga la medida $m\angle BAC + m\angle EDF$

Notas: Construir figuras es dibujarlas utilizando sólo regla y compás. La regla sólo se usa para trazar rectas que unan dos puntos dados y el compás sólo para trazar una circunferencia con centro en un punto dado y un radio dado.

145

1. Comprender la situación. [B1]

M: ¿Qué datos nos dan?

RP: Tres puntos, el ángulo ∠AOB, el rayo $\overrightarrow{CD}$, el vértice C.

* Pedir que dibujen en la pizarra los datos (el ángulo y el rayo).

M: ¿Qué vamos a construir?

RP: Un ángulo congruente al ∠AOB.

2. Construir un ángulo congruente.

* Hacer preguntas sobre cómo se puede hacer esta construcción (en todo el proceso) con el propósito de inducir al estudiante, sino hay respuestas deben seguirse los pasos del LE.

* Hacer la construcción siguiendo los cuatro pasos dados en el LE.

* El profesor puede mandar a un estudiante para que haga la construcción en la pizarra e ir supervisando el trabajo de todos los estudiantes.

* Discutir sobre las dos notas presentadas en esta página.

3. Resolver 1.

1. **Recordar la definición de bisectriz de un ángulo. [C]**

M: ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?

RP: Es la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Divide al segmento en dos partes iguales.

M: ¿Cuál de las respuestas corresponde al bisector y cual a la bisectriz? ¿Cuál es la diferencia?

* Concluir que el bisector biseca un segmento y la bisectriz biseca un ángulo.

2. **Construir la bisectriz de un ángulo. [C1]**

* Hacer esta construcción en forma similar a la realizada en la clase anterior.

* Al verificar la congruencia de los dos ángulos resultantes tenga cuidado de no confundir los puntos E y E´.

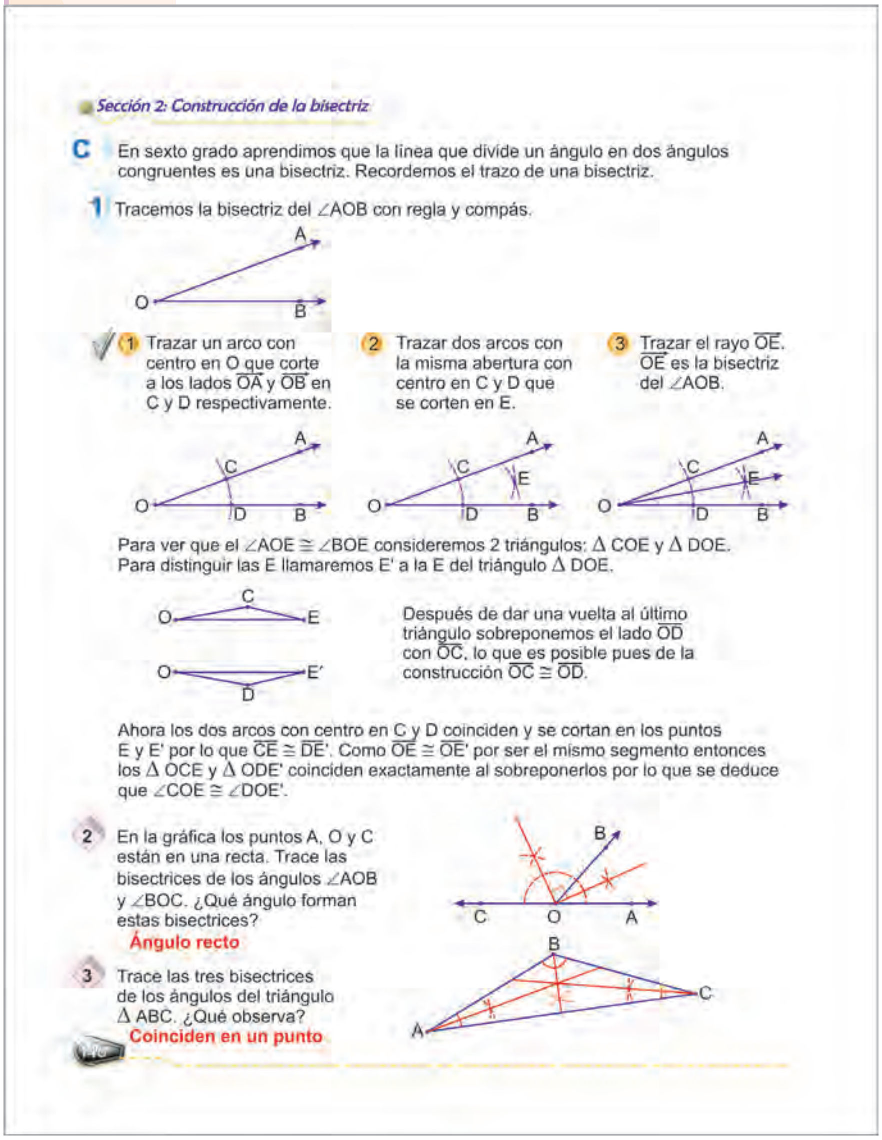
3. **Resolver 2 y 3.**

En 2 sugiera a los estudiantes que utilicen la escuadra y el transportador para verificar que el ángulo formado por las bisectrices mide 90º.

Lección 2: (2/2) Construcción de ángulos

Objetivo: • Construir la bisectriz de un ángulo.

Materiales: (M) Regla, compás, lámina con la construcción del LE y LE. (N) Regla, compás y LE.



Sección 2: Construcción de la bisectriz

C En sexto grado aprendimos que la línea que divide un ángulo en dos ángulos congruentes es una bisectriz. Recordemos el trazo de una bisectriz.

1 Tracemos la bisectriz del ∠AOB con regla y compás.

① Trazar un arco con centro en O que corte a los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ en C y D respectivamente.

② Trazar dos arcos con la misma abertura con centro en C y D que se corten en E.

③ Trazar el rayo $\overline{OE}$. $\overline{OE}$ es la bisectriz del ∠AOB.

Para ver que el ∠AOE ≅ ∠BOE consideremos 2 triángulos: Δ COE y Δ DOE. Para distinguir las E llamaremos E' a la E del triángulo Δ DOE.

Después de dar una vuelta al último triángulo sobreponemos el lado $\overline{OD}$ con $\overline{OC}$, lo que es posible pues de la construcción $\overline{OC} \cong \overline{OD}$.

Ahora los dos arcos con centro en C y D coinciden y se cortan en los puntos E y E' por lo que $\overline{CE} \cong \overline{DE'}$. Como $\overline{OE} \cong \overline{OE'}$ por ser el mismo segmento entonces los Δ OCE y Δ ODE' coinciden exactamente al sobreponerlos por lo que se deduce que ∠COE ≅ ∠DOE'.

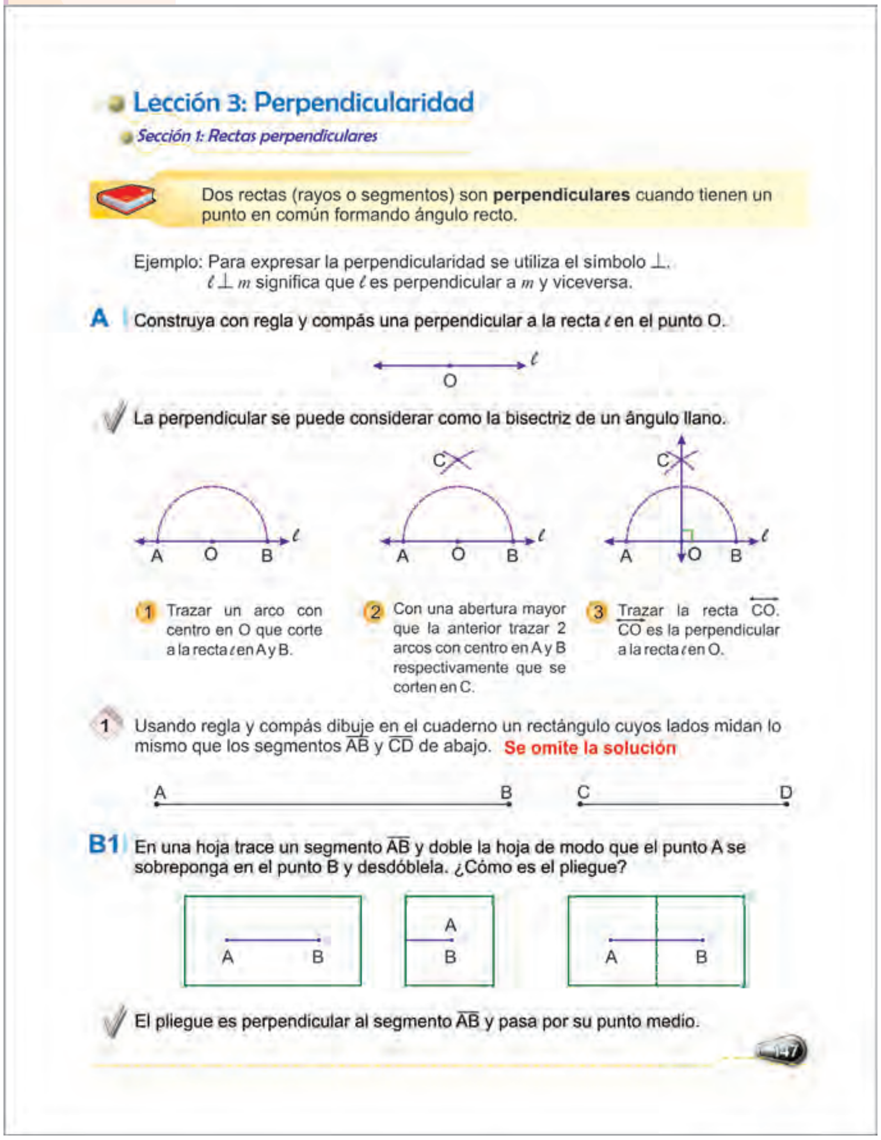
2 En la gráfica los puntos A, O y C están en una recta. Trace las bisectrices de los ángulos ∠AOB y ∠BOC. ¿Qué ángulo forman estas bisectrices?
Ángulo recto

3 Trace las tres bisectrices de los ángulos del triángulo Δ ABC. ¿Qué observa?
Coinciden en un punto

Lección 3: (1/4) **Perpendicularidad**

Objetivo:
- Definir y designar dos rectas perpendiculares.
- Construir rectas perpendiculares.
- Definir la mediatriz de un segmento.

Materiales: (M) Regla, escuadra, compás y LE. (N) Regla, escuadra, compás, una hoja de papel y LE.



Lección 3: Perpendicularidad

Sección 1: Rectas perpendiculares

Dos rectas (rayos o segmentos) son **perpendiculares** cuando tienen un punto en común formando ángulo recto.

Ejemplo: Para expresar la perpendicularidad se utiliza el símbolo $\perp$.
$\ell \perp m$ significa que ℓ es perpendicular a m y viceversa.

A Construya con regla y compás una perpendicular a la recta ℓ en el punto O.

La perpendicular se puede considerar como la bisectriz de un ángulo llano.

(1) Trazar un arco con centro en O que corte a la recta ℓ en A y B.

(2) Con una abertura mayor que la anterior trazar 2 arcos con centro en A y B respectivamente que se corten en C.

(3) Trazar la recta $\overleftrightarrow{CO}$. $\overleftrightarrow{CO}$ es la perpendicular a la recta ℓ en O.

(1) Usando regla y compás dibuje en el cuaderno un rectángulo cuyos lados midan lo mismo que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de abajo. Se omite la solución

B1 En una hoja trace un segmento $\overline{AB}$ y doble la hoja de modo que el punto A se sobreponga en el punto B y desdóblela. ¿Cómo es el pliegue?

El pliegue es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y pasa por su punto medio.

147

1. Definir rectas perpendiculares.

M: ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

RP: Cuando se cortan. Cuando se tocan y forman ángulos rectos.

* Concluir que son perpendiculares cuando tienen un punto en común formando ángulo recto.
* Dibujar todas las RP dadas para determinar la correcta.
* Designar las rectas perpendiculares con el símbolo $\perp$.

2. Construir una recta perpendicular. [A]

* Hacer esta construcción en forma similar a las realizadas en las dos clases anterior.
* Analizar la sugerencia “trazar la bisectriz del ángulo llano” y utilizarla.

3. Resolver 1.

4. Definir la mediatriz de un segmento. [B1]

* Plantee **B1** con instrucciones.

M: ¿Cómo es el doblez de la hoja con respecto al segmento $\overline{AB}$?

* El estudiante dibujará el segmento en diferentes direcciones y el procedimiento es el mismo.

Es decir, el segmento $\overline{AB}$ no necesariamente debe ser paralelo al lado de la hoja.

RP: Tiene un ángulo recto. Es perpendicular. Pasa por el punto medio.

* Confirmar lo anterior usando la escuadra para el ángulo recto y la regla o compás para el punto medio.
* Concluir que a este doblez se le llama mediatriz.

Continúa en la siguiente página...

... viene de la página anterior.

M: ¿Qué es la mediatriz de un segmento?

RP: Es una recta perpendicular al segmento que lo corta por la mitad.

* Comparar las RP con la definición del LE.

5. Concluir que la distancia desde cualquier punto de la mediatriz a los extremos del segmento es igual. [B2]

* Plantee **B2** con instrucciones.

M: ¿Cómo son los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$?

RP: Casi iguales, son iguales.

* Concluir que son iguales.

M: ¿Cómo son las distancias desde un punto de la mediatriz a los extremos del segmento?

RP: Iguales.

* Verificar que las distancias son iguales en el resumen del LE.

Lección 3: (1/4) Perpendicularidad

[Continuación]

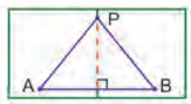
Sección 1: Definición de la mediatriz

A este pliegue que es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y que pasa por su punto medio se le llama mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

2 Marque un punto P en el pliegue y trace los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

Compare la longitud de estos segmentos. ¿Cómo son?, ¿por qué son así?

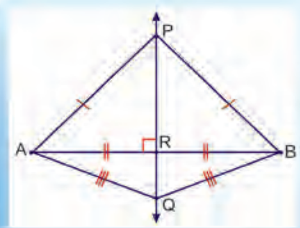


Son iguales, porque al doblar la hoja por el pliegue el segmento $\overline{PA}$ coincide con $\overline{PB}$.

El pliegue es un eje de simetría del triángulo Δ PAB.

De **B1** y **B2** se puede concluir lo siguiente:

Las distancias entre un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento y los dos extremos de éste son iguales.



Si $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ se concluye que:

AP = BP

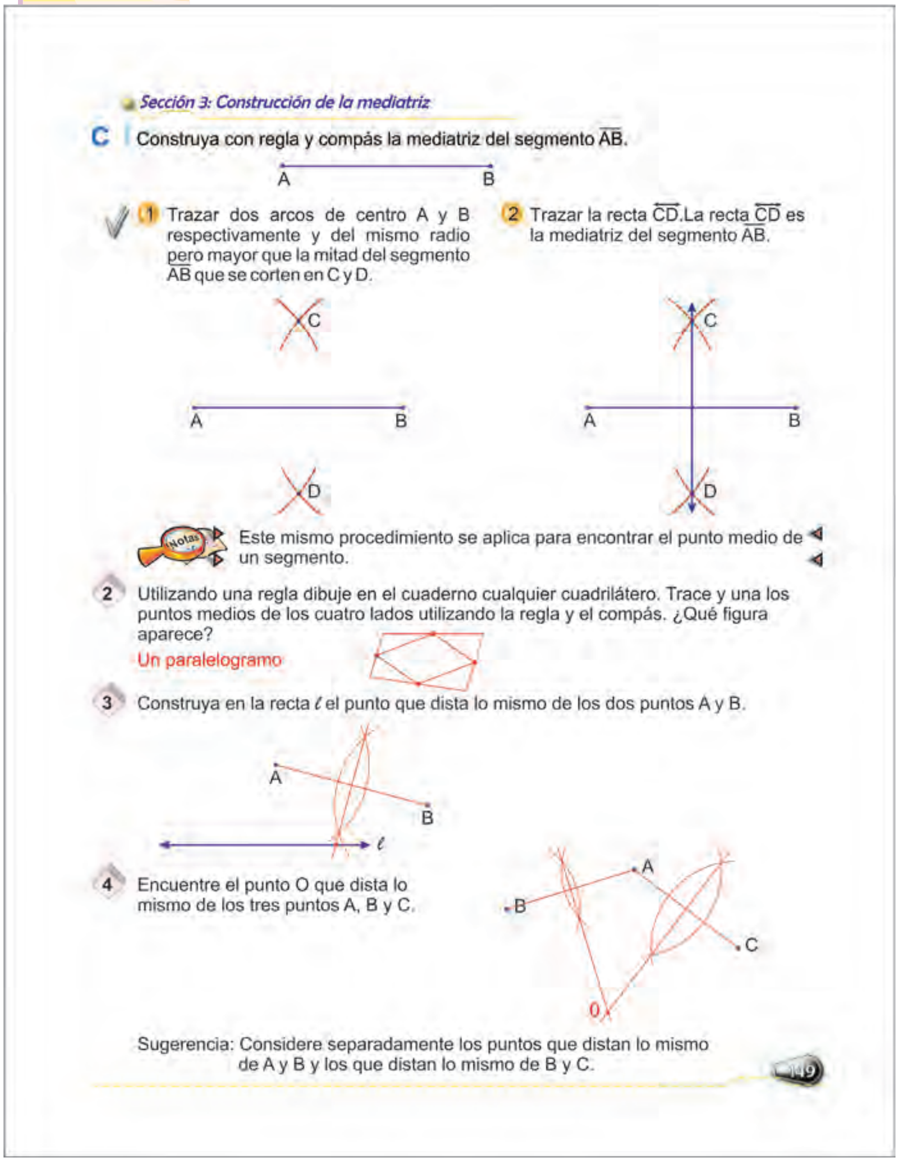
AR = BR

AQ = BQ

Lección 3: (2/4) **Perpendicularidad**

Objetivo:
- Construir la mediatriz de un segmento.
- Construir el punto de una recta que dista lo mismo de dos puntos exteriores a ella.
- Construir el punto que dista lo mismo de tres puntos no alineados.

Materiales: (M) Regla, compás y LE. (N) Regla, compás y LE.



Sección 3: Construcción de la mediatriz

C Construya con regla y compás la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

1 Trazar dos arcos de centro A y B respectivamente y del mismo radio pero mayor que la mitad del segmento $\overline{AB}$ que se corten en C y D.

2 Trazar la recta $\overleftrightarrow{CD}$. La recta $\overleftrightarrow{CD}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Notas: Este mismo procedimiento se aplica para encontrar el punto medio de un segmento.

2 Utilizando una regla dibuje en el cuaderno cualquier cuadrilátero. Trace y una los puntos medios de los cuatro lados utilizando la regla y el compás. ¿Qué figura aparece?

Un paralelogramo

3 Construya en la recta ℓ el punto que dista lo mismo de los dos puntos A y B.

4 Encuentre el punto O que dista lo mismo de los tres puntos A, B y C.

Sugerencia: Considere separadamente los puntos que distan lo mismo de A y B y los que distan lo mismo de B y C.

149

1. Comprender la situación. [C].

M: ¿Qué datos tenemos?

RP: El segmento $\overline{AB}$.

M: Tracen en el pizarrón el segmento $\overline{AB}$. ¿Qué nos piden?

RP: Construir su mediatriz.

2. Construir la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

M: ¿Cómo vamos a construir la mediatriz? ¿Qué estrategia seguimos?

* Hacer preguntas sobre cómo se puede hacer esta construcción (en todo el proceso) con el propósito de inducir al estudiante, si no hay respuestas recuérdeles el concepto de mediatriz y que las distancias desde un punto de la mediatriz a los extremos del segmento son iguales para que surja la estrategia del LE.
* Hacer la construcción siguiendo los pasos del LE.
* Que algunos estudiantes hagan el proceso primero en el pizarrón para que las ideas de todos sean tomadas en cuenta y después en sus cuadernos. Que cada paso sea explicado para cerciorarse que la estrategia del LE se ha comprendido.

3. Resolver 2, 3 y 4.

* Sugerir que utilicen el concepto de mediatriz. Que consideren los segmentos que determinan los puntos dados.

1. **Construir una perpendicular a una recta dada que pasa por un punto fuera de ésta. [D]**
* Hacer esta construcción en forma similar a las anteriores.

2. **Encontrar la distancia mínima entre $\overleftrightarrow{AB}$ y P en la construcción anterior. [E]**

M: Copien la última figura de la construcción anterior y marquen varios puntos en $\overleftrightarrow{AB}$ incluyendo el punto medio O. Midan las distancias entre el punto P y todos los puntos marcados en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. ¿Cuáles son las distancias halladas?

RP: (Serán diferentes para cada estudiante).

M: ¿Cuál es la distancia más corta?, ¿A qué puntos corresponde?

RP: OP (Las distancias mínimas diferirán entre sí, pero todas serán de los puntos O y P).

M: ¿Qué concluyen?

RP: Que la distancia mínima es la longitud del segmento perpendicular.

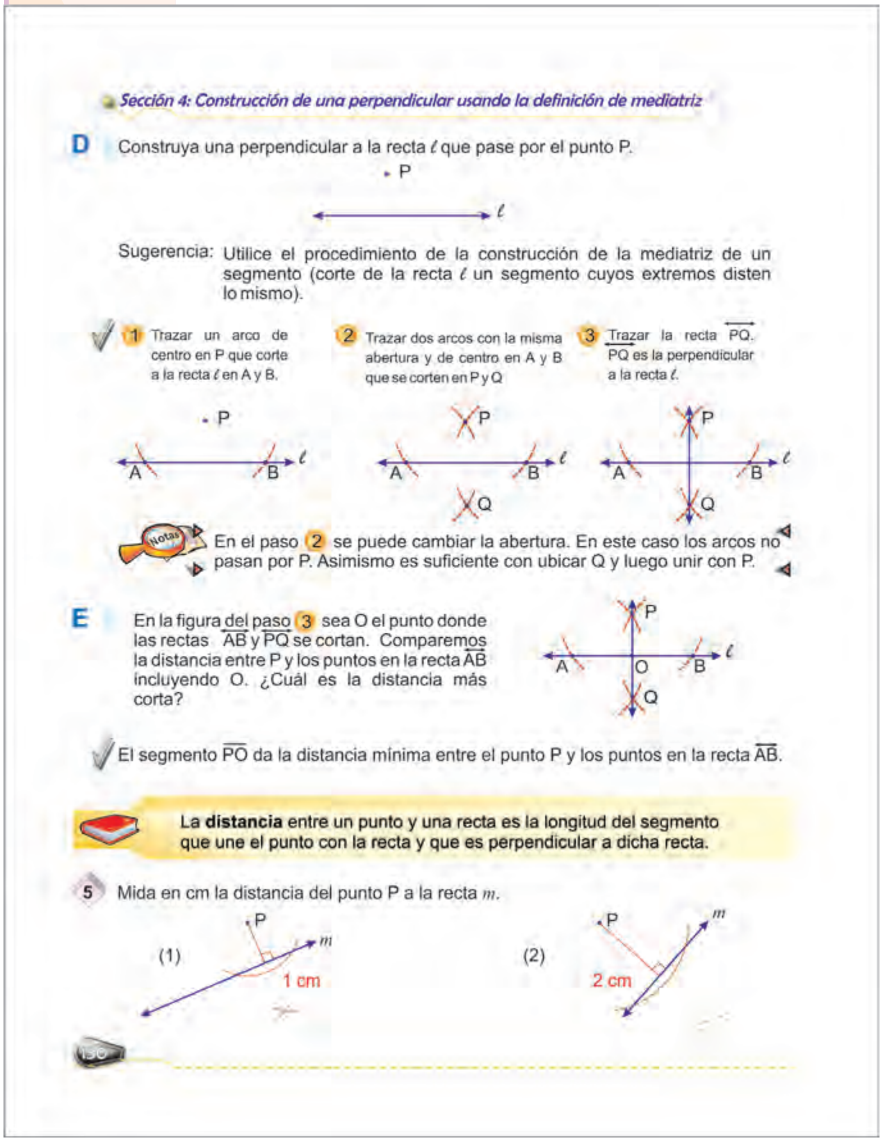
M: Ahora lean el LE y comparen sus conclusiones.

3. **Resolver 5.**

Lección 3: (3/4) **Perpendicularidad**

Objetivo:
- Construir la recta que pasa por un punto exterior a una recta dada y es perpendicular a ésta, utilizando el concepto de mediatriz.
- Encontrar la distancia entre un punto exterior a una recta y ésta.

Materiales: (M) Regla, compás y LE. (N) Regla, compás y LE.


Sección 4: Construcción de una perpendicular usando la definición de mediatriz

D Construya una perpendicular a la recta ℓ que pase por el punto P.

Sugerencia: Utilice el procedimiento de la construcción de la mediatriz de un segmento (corte de la recta ℓ un segmento cuyos extremos disten lo mismo).

1 Trazar un arco de centro en P que corte a la recta ℓ en A y B.
2 Trazar dos arcos con la misma abertura y de centro en A y B que se corten en P y Q.
3 Trazar la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. $\overleftrightarrow{PQ}$ es la perpendicular a la recta ℓ.

Notas: En el paso 2 se puede cambiar la abertura. En este caso los arcos no pasan por P. Asimismo es suficiente con ubicar Q y luego unir con P.

E En la figura del paso 3 sea O el punto donde las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ se cortan. Comparemos la distancia entre P y los puntos en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ incluyendo O. ¿Cuál es la distancia más corta?

El segmento $\overline{PO}$ da la distancia mínima entre el punto P y los puntos en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

La **distancia** entre un punto y una recta es la longitud del segmento que une el punto con la recta y que es perpendicular a dicha recta.

5 Mida en cm la distancia del punto P a la recta m.

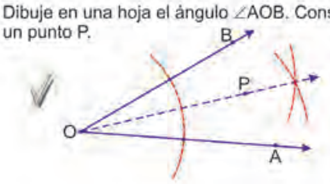
(1) 1 cm (2) 2 cm

Lección 3: (4/4) Perpendicularidad

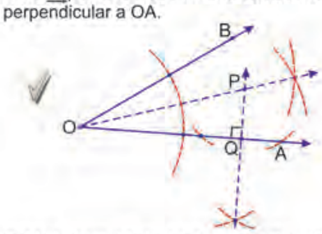
Objetivo: • Encontrar la característica de los puntos de la bisectriz en relación a los lados del ángulo.

Materiales: (M) Regla, compás y LE.
(N) Regla, compás, hoja de papel, tijera y LE.

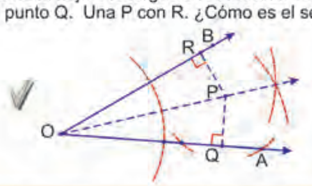
F (1) Dibuje en una hoja el ángulo $\angle AOB$. Construya la bisectriz y sobre ella tome un punto P.



(2) Halle el punto Q sobre el lado $\overline{OA}$ de modo que el segmento $\overline{PQ}$ sea perpendicular a OA.



(3) Doble la hoja a lo largo de la bisectriz. Sea R el punto de $\overline{OB}$ que corresponde al punto Q. Una P con R. ¿Cómo es el segmento PR?



El punto R queda en el lado $\overline{OB}$. $\overline{PR} \perp \overline{OB}$ y PQ = PR, porque los triángulos Δ OPQ y Δ OPR se sobreponen.

Los puntos en la bisectriz de un ángulo están a la misma distancia desde sus dos lados.

6 Halle en la recta n el punto O que dista lo mismo de las dos rectas ℓ y m.



151

Revisar los puntos de lección para repasar las definiciones con los estudiantes (sexto grado).

1. Concluir que los puntos en la bisectriz de un ángulo están a la misma distancia desde sus dos lados. [F]

* Plantee **F** con instrucciones.

* Para facilitar el entendimiento pueden cortar el ángulo antes del doblez.

M: ¿Coinciden los lados del ángulo?

RP: Sí.

M: ¿Cómo es el segmento $\overline{PR}$ con respecto al lado $\overrightarrow{OB}$?

RP: Perpendicular.

M: ¿Cómo son las distancias desde los puntos Q y R al punto P de la bisectriz?

RP: Iguales.

* Oriéntelos para que comparen los dos triángulos que se forman y comprendan la igualdad de los dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$.

M: ¿Qué propiedad cumplen los puntos de la bisectriz de un ángulo?

RP: Los puntos de la bisectriz están a la misma distancia de los lados del ángulo.

M: Ahora lean el resumen en el LE.

2. Resolver 6 .

1. **Recordar la definición de rectas paralelas. [A]**

M. ¿Cuándo dos rectas son paralelas?

RP: Cuando se cortan. Cuando no se tocan.

* Concluir que la última RP es la correcta.

* Dibujar todas las situaciones de las RP para demostrar su validez

* Designar el paralelismo con el símbolo ll.

2. **Trazar rectas paralelas. [A1]**

M: ¿Cómo podemos trazar rectas paralelas utilizando sólo las escuadras?

* Este procedimiento los estudiantes lo vieron en tercer grado, si acaso no lo recuerdan plantee **A1** con instrucciones.

* Puede enviar varios estudiantes a la pizarra.

M: ¿Cuántas rectas paralelas que pasen por un punto exterior a una recta dada pueden trazarse?

* Concluir que sólo una.

3. **Analizar los ángulos formados por una recta que corta dos rectas paralelas. [A2]**

M: ¿Cómo son los ángulos formados por una recta que corta dos rectas paralelas?

* Concluir que son iguales.

* Concluir que al utilizar las escuadras la recta que no se mueve es paralela a la que se mueve y no cambian sus ángulos.

4. **Definir recta transversal. [A3]**

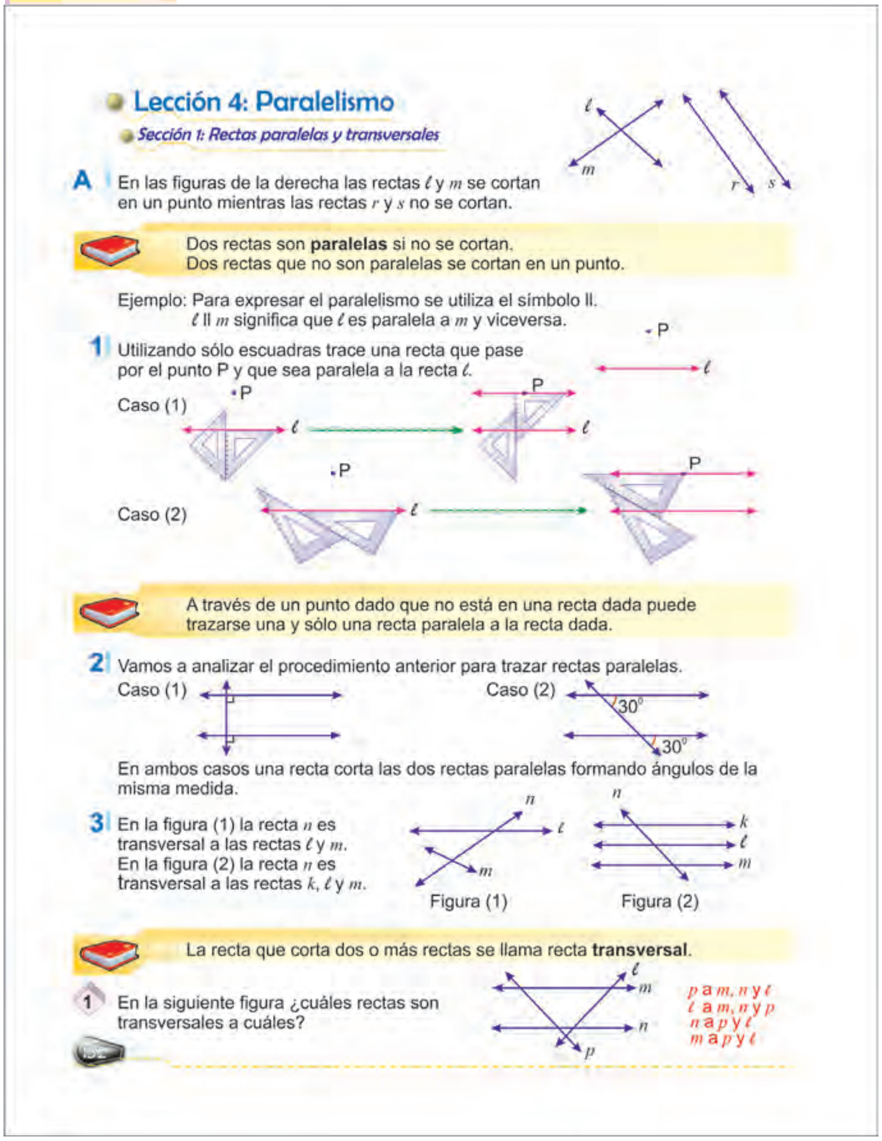
M: ¿Cómo se llama la recta que intercepta a las otras dos?

RP: Recta transversal.

Lección 4: (1/9) Paralelismo

Objetivo:
- Definir y designar rectas paralelas.
- Definir y reconocer rectas transversales.

Materiales: (M) Regla, escuadra y LE. (N) Regla, escuadra y LE.



Lección 4: Paralelismo

Sección 1: Rectas paralelas y transversales

A En las figuras de la derecha las rectas ℓ y m se cortan en un punto mientras las rectas r y s no se cortan.

Dos rectas son **paralelas** si no se cortan.
Dos rectas que no son paralelas se cortan en un punto.

Ejemplo: Para expresar el paralelismo se utiliza el símbolo ll.
ℓ ll m significa que ℓ es paralela a m y viceversa.

1 Utilizando sólo escuadras trace una recta que pase por el punto P y que sea paralela a la recta ℓ.

Caso (1)

Caso (2)

A través de un punto dado que no está en una recta dada puede trazarse una y sólo una recta paralela a la recta dada.

2 Vamos a analizar el procedimiento anterior para trazar rectas paralelas.

Caso (1) Caso (2)

En ambos casos una recta corta las dos rectas paralelas formando ángulos de la misma medida.

3 En la figura (1) la recta n es transversal a las rectas ℓ y m.
En la figura (2) la recta n es transversal a las rectas k, ℓ y m.

Figura (1) Figura (2)

La recta que corta dos o más rectas se llama recta **transversal**.

1 En la siguiente figura ¿cuáles rectas son transversales a cuáles?

p a m, n y ℓ
ℓ a m, n y p
n a p y ℓ
m a p y ℓ

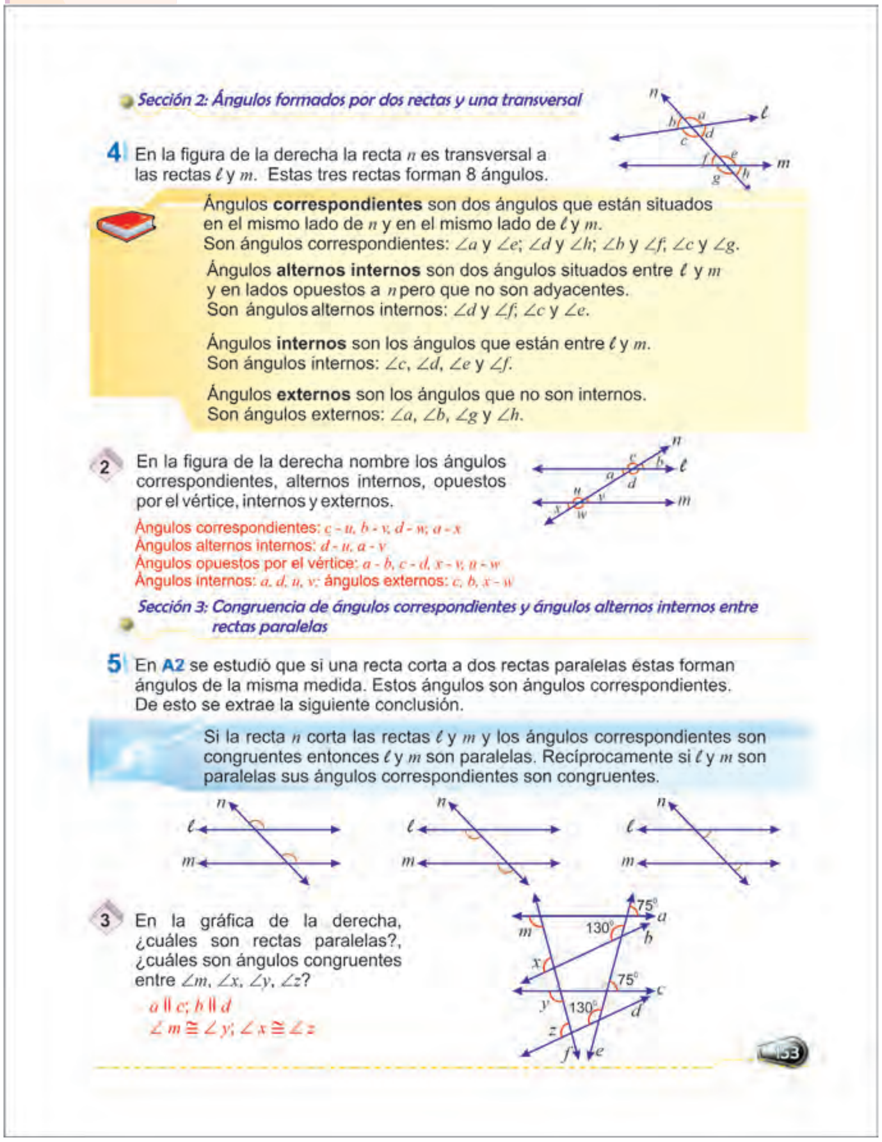
*Pedir que identifiquen la transversal en las figuras (a) y (b).

5. **Resolver 1.**

Lección 4: (2/9) **Paralelismo**

Objetivo:
- Identificar y clasificar los ángulos formados por dos rectas y una transversal.
- Reconocer las rectas que son paralelas dadas las medidas de los ángulos correspondientes y viceversa.

Materiales: (M) Regla, transportador y LE. (N) Regla, transportador y LE.



Sección 2: Ángulos formados por dos rectas y una transversal

4 En la figura de la derecha la recta n es transversal a las rectas ℓ y m. Estas tres rectas forman 8 ángulos.

Ángulos **correspondientes** son dos ángulos que están situados en el mismo lado de n y en el mismo lado de ℓ y m.
Son ángulos correspondientes: $\angle a$ y $\angle e$; $\angle d$ y $\angle h$; $\angle b$ y $\angle f$; $\angle c$ y $\angle g$.

Ángulos **alternos internos** son dos ángulos situados entre ℓ y m y en lados opuestos a n pero que no son adyacentes.
Son ángulos alternos internos: $\angle d$ y $\angle f$; $\angle c$ y $\angle e$.

Ángulos **internos** son los ángulos que están entre ℓ y m.
Son ángulos internos: $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$ y $\angle f$.

Ángulos **externos** son los ángulos que no son internos.
Son ángulos externos: $\angle a$, $\angle b$, $\angle g$ y $\angle h$.

2 En la figura de la derecha nombre los ángulos correspondientes, alternos internos, opuestos por el vértice, internos y externos.

Ángulos correspondientes: $c - u$, $b - v$, $d - w$, $a - x$
Ángulos alternos internos: $d - u$, $a - v$
Ángulos opuestos por el vértice: $a - b$, $c - d$, $x - v$, $u - w$
Ángulos internos: a, d, u, v; ángulos externos: c, b, $x - w$

Sección 3: Congruencia de ángulos correspondientes y ángulos alternos internos entre rectas paralelas

5 En **A2** se estudió que si una recta corta a dos rectas paralelas éstas forman ángulos de la misma medida. Estos ángulos son ángulos correspondientes. De esto se extrae la siguiente conclusión.

Si la recta n corta las rectas ℓ y m y los ángulos correspondientes son congruentes entonces ℓ y m son paralelas. Recíprocamente si ℓ y m son paralelas sus ángulos correspondientes son congruentes.

3 En la gráfica de la derecha, ¿cuáles son rectas paralelas?, ¿cuáles son ángulos congruentes entre $\angle m$, $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$?

$a \parallel c$; $b \parallel d$
$\angle m \cong \angle y$; $\angle x \cong \angle z$

153

1. **Identificar los ángulos que se forman con dos rectas y su transversal. [A4]**

M: Tracen dos rectas y una transversal. ¿Cuántos ángulos se forman?

RP: 8, 4, 6.

M: Se formaron 8 ángulos. Designen con una letra cada ángulo formado (que coincida con el LE).

M: Ahora voy a dar la definición de cada tipo de ángulo y ustedes los identifican. Los ángulos correspondientes son los que están en el mismo lado de n y en el mismo lado de ℓ y m. ¿Cuáles son las parejas de este tipo de ángulos?

RP: $\angle$a y $\angle$e; $\angle$d y $\angle$h; $\angle$b y $\angle$f; $\angle$c y $\angle$g.

* Continuar la identificación de los demás tipos de ángulos en forma similar.

2. **Resolver 2.**

3. **Medir los ángulos correspondientes de rectas paralelas. [A5]**

M: Tracen las rectas paralelas que hicieron en **A2** y midan los ángulos correspondientes. ¿Cómo son? ¿Cuánto miden?

RP: Son iguales, son congruentes, miden 45º, miden 135º (las RP dependen de las parejas escogidas).

M: ¿Qué concluyen?

RP: Si las rectas son paralelas los ángulos correspondientes son congruentes.

4. **Trazar ángulos correspondientes congruentes y verificar si las rectas son paralelas.**

M: Ahora hagamos el proceso inverso. Dibujemos dos ángulos correspondientes que midan 40º. Hacerlo en el pizarrón y que los estudiantes sigan el mismo procedimiento del maestro.

M. ¿Cómo son las dos rectas?

RP: Parece que son paralelas (Las RP dependerán de la precisión del trabajo).

* Concluir lo mismo del LE.

5. **Resolver 3.**

1. Encontrar la medida de los ángulos internos. [B1]

M: ¿Qué datos nos dan?

RP: Las rectas ℓ y m que son paralelas y un ángulo exterior que mide 70º.

M: ¿Qué nos piden?

RP: Encontrar la medida de los 4 ángulos internos.

M: Tomando en cuenta lo aprendido anteriormente, ¿qué conceptos vamos a emplear para encontrar las medidas de los ángulos?

RP: Ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, ángulos correspondientes.

* Auxiliándose de la gráfica encontrar la medida de los ángulos empleando las ideas dadas en las RP y el LE.

2. Demostrar la congruencia de los ángulos alternos internos entre paralelas. [B2]

M: ¿Qué tipo de ángulos son ∠a y ∠e? ¿Cómo son?

RP: Ángulos correspondientes. Son congruentes.

M: ¿Qué tipo de ángulos son ∠d y ∠e? ¿Cómo son?

RP: Ángulos opuestos por el vértice. Son congruentes.

M: ¿Qué podemos concluir de ∠a y ∠d?

RP: Son congruentes.

* Comprobar que lo demostrado se cumple con la medida de los ángulos calculados en [B1].

* Concluir que en las rectas paralelas cortadas por una transversal los ángulos correspondientes son congruentes y los alternos internos también.

3. Resolver 4.

* Concluir sobre las condiciones que deben cumplir dos rectas para que sean paralelas cuando son cortadas por una transversal.

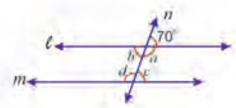
Lección 4: (3/9) Paralelismo

Objetivo:

- Encontrar la medida de los ángulos internos de dos rectas paralelas y una transversal dado un ángulo externo.
- Demostrar que si dos rectas son paralelas entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Materiales:

B1 En la gráfica de la derecha las rectas ℓ y m son paralelas. Encuentre las medidas de:
(1) $\angle a$; (2) $\angle b$; (3) $\angle c$ y (4) $\angle d$.



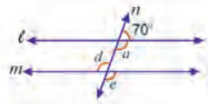
(1) $m\angle a = 180° - 70°$
$= 110°$

(2) $m\angle b = 70°$ ...... Ángulos opuestos por el vértice

(3) $m\angle c = 70°$ ...... Ángulos correspondientes con el ángulo dado de 70°

(4) $m\angle d = 180° - m\angle c$
$= 180° - 70°$
$= 110°$

2 En la gráfica de la derecha, si ℓ y m son rectas paralelas ¿por qué $\angle a$ y $\angle d$ son congruentes?



(1) $m\angle a = m\angle e$ .... Ángulos correspondientes
(2) $m\angle d = m\angle e$ .... Ángulos opuestos por el vértice
(3) Por tanto $m\angle a = m\angle d$ .... Por (1) y (2)

En **B1** se puede observar que $m\angle a = 110°$ y $m\angle d = 110°$ por lo que $m\angle a = m\angle d = 110°$.

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal los ángulos alternos internos son congruentes. Recíprocamente si los ángulos alternos internos son congruentes las rectas son paralelas.

4 En la figura de la derecha si $m\angle a = m\angle b$ explique por qué ℓ y m son paralelas usando ángulos correspondientes.



Como $m\angle a + m\angle c = 180°$
$m\angle b + m\angle d = 180°$
y $m\angle a = m\angle b$
entonces $m\angle c = m\angle d$ y son correspondientes por lo que ℓ y m son paralelas

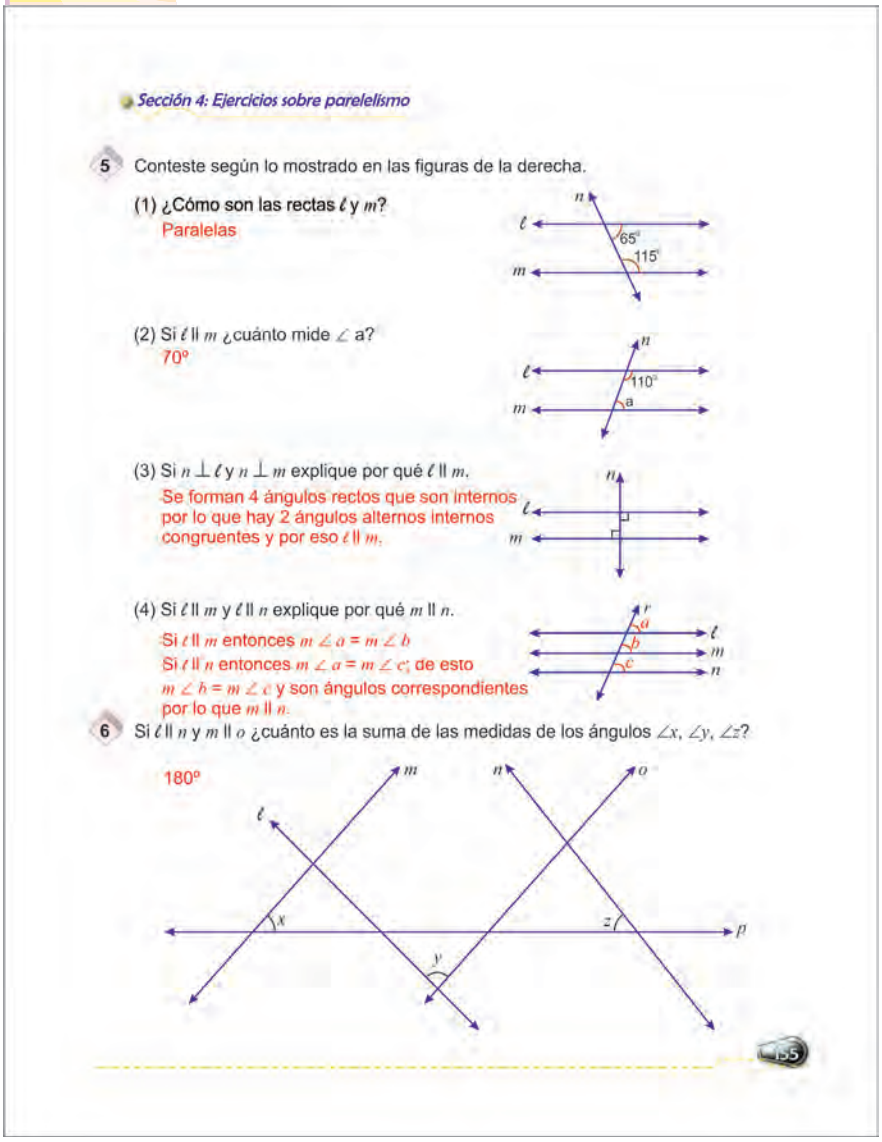
Si dos rectas son cortadas por una transversal, éstas son paralelas cuando una de las siguientes condiciones se satisfaga:

1. los ángulos correspondientes son congruentes.
2. los ángulos alternos internos son congruentes.

Lección 4: (4/9) **Paralelismo**

Objetivo: • Determinar si dos rectas son paralelas.

Materiales:



Sección 4: Ejercicios sobre parelelismo

5 Conteste según lo mostrado en las figuras de la derecha.

(1) ¿Cómo son las rectas ℓ y m?
Paralelas

(2) Si $\ell \parallel m$ ¿cuánto mide $\angle$ a?
70º

(3) Si $n \perp \ell$ y $n \perp m$ explique por qué $\ell \parallel m$.
Se forman 4 ángulos rectos que son internos por lo que hay 2 ángulos alternos internos congruentes y por eso $\ell \parallel m$.

(4) Si $\ell \parallel m$ y $\ell \parallel n$ explique por qué $m \parallel n$.
Si $\ell \parallel m$ entonces $m\angle a = m\angle b$
Si $\ell \parallel n$ entonces $m\angle a = m\angle c$; de esto $m\angle b = m\angle c$ y son ángulos correspondientes por lo que $m \parallel n$.

6 Si $\ell \parallel n$ y $m \parallel o$ ¿cuánto es la suma de las medidas de los ángulos $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$?

180º

135

1. **Resolver 5.**

* Para (1) sugiera a los estudiantes establecer la relación entre los ángulos dados. En (2) emplear lo visto en (1). En (3) aplicar la definición de perpendicularidad y en (4) aplicar la congruencia de ángulos correspondientes.

2. **Resolver 6.**

* Sugerir que los ángulos se trasladen a un solo triángulo y concluir que la suma es 180º.

1. **Demostrar que el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a la recta m. [C]**

* Inducir a los estudiantes que consideren las hipótesis (datos dados).

* Plantee C(1) con instrucciones.

M: ¿Qué tipo de ángulos son ∠a y ∠b? ¿Cómo son?

RP: Ángulos alternos internos. Son congruentes.

M: ¿Cómo $\overline{AB} \perp \ell$ ¿Cuánto mide el ∠a? ¿y ∠b?

RP: Cada uno mide 90°.

M: ¿Qué se puede concluir sobre $\overline{AB}$ y m?

RP: Que son perpendiculares.

2. **Comparar las longitudes de los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. [C(2)]**

* Pedir que midan las distancias AB y CD usando la regla.

M: ¿Cómo son las medidas?

RP: Casi iguales. Iguales.

* Concluir que son iguales.

3. **Definir la distancia entre dos rectas paralelas.**

M: ¿Cuál es la distancia entre dos rectas paralelas?

RP: El segmento $\overline{AB}$. La medida del segmento perpendicular $\overline{AB}$ a ambas rectas.

* Concluir que la última RP es la adecuada.

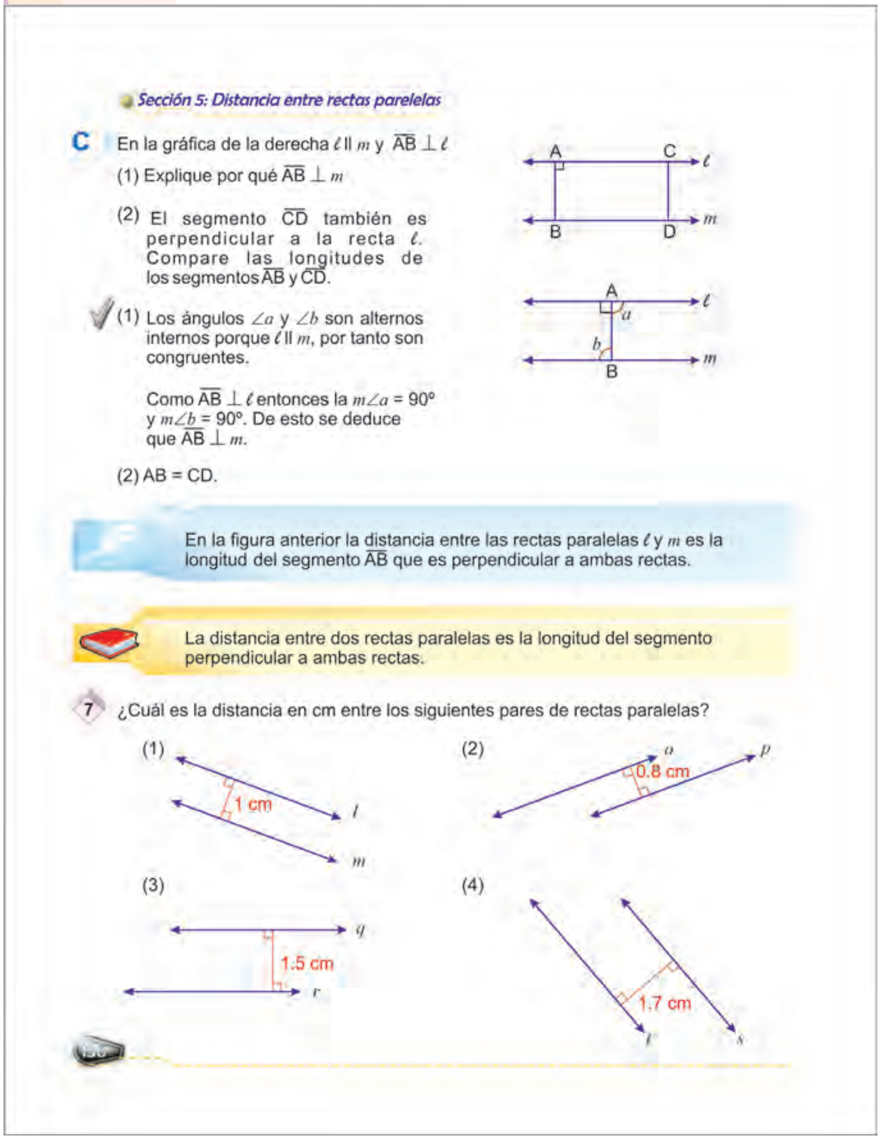
4. **Resolver 7.**

Lección 4: (5/9)

Paralelismo

Objetivo: • Medir la distancia entre dos rectas paralelas.

Materiales: (M) Regla y LE. (N) Regla graduada (cm) y LE.



Sección 5: Distancia entre rectas paralelas

C En la gráfica de la derecha $\ell \parallel m$ y $\overline{AB} \perp \ell$

(1) Explique por qué $\overline{AB} \perp m$

(2) El segmento $\overline{CD}$ también es perpendicular a la recta ℓ. Compare las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

(1) Los ángulos $\angle a$ y $\angle b$ son alternos internos porque $\ell \parallel m$, por tanto son congruentes.

Como $\overline{AB} \perp \ell$ entonces la $m\angle a = 90°$ y $m\angle b = 90°$. De esto se deduce que $\overline{AB} \perp m$.

(2) AB = CD.

En la figura anterior la distancia entre las rectas paralelas ℓ y m es la longitud del segmento $\overline{AB}$ que es perpendicular a ambas rectas.

La distancia entre dos rectas paralelas es la longitud del segmento perpendicular a ambas rectas.

7 ¿Cuál es la distancia en cm entre los siguientes pares de rectas paralelas?

Lección 4: (6/9)

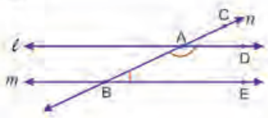
Paralelismo

Objetivo: • Demostrar que si dos rectas son paralelas entonces los ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios y viceversa.

Materiales: (M) Ilustraciones de la demostración y LE.

Sección 6: Demostraciones sobre paralelismo

D En el siguiente dibujo la recta n corta a las rectas ℓ y m en los puntos A y B respectivamente.



(1) Demuestre que si $\ell \parallel m$ entonces $m\angle DAB + m\angle ABE = 180°$

(2) Demuestre que si $m\angle DAB + m\angle ABE = 180°$ entonces $\ell \parallel m$.

(1) Como los puntos C, A y B están en la misma recta entonces

$m\angle DAB + m\angle CAD = 180°$

Por otra parte como $\ell \parallel m$ entonces $m\angle CAD = m\angle ABE$ porque son ángulos correspondientes. Sustituyendo esta igualdad en la primera se tiene que:

$m\angle DAB + m\angle ABE = 180°$ .... Que es lo que se quería demostrar

(2) De (1) se sabe que $m\angle DAB + m\angle CAD = 180°$ y de esto se deduce que:

$m\angle CAD = 180° - m\angle DAB$

$= (m\angle DAB + m\angle ABE) - m\angle DAB$ ... De lo supuesto

$= m\angle ABE$ ...... Porque $m\angle DAB - m\angle DAB = 0$

Como $m\angle CAD = m\angle ABE$ y además son ángulos correspondientes entonces $\ell \parallel m$.

157

1. Demostrar que m∠DAB + m∠EBA = 180º. [D(1)]

M: ¿Los puntos C, A y B son colineales?

RP: Sí.

M: Si estos puntos son colineales, ¿cuánto es m∠DAB + m∠CAD?

RP: 180º.

M: Si $\ell \parallel m$, ¿Cómo es la m∠CAD y m∠ABE?

RP: Iguales. m∠CAD = m∠ABE

M: Como m∠DAB + m∠CAD = 180º y m∠CAD = m∠ABE ¿Cuánto es m∠DAB + m∠ABE?

* Al hacer las sustituciones en estas igualdades llegar a la conclusión que suman 180º.
* Concluir que si dos rectas son paralelas entonces los ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios.
* Hacer que los estudiantes expliquen oralmente esta demostración justificando cada paso.

2. Demostrar que $\ell \parallel m$. [D(2)]

* Hacer esta demostración en forma similar a la anterior justificando todos los pasos.
* Compararla con la demostración del LE.

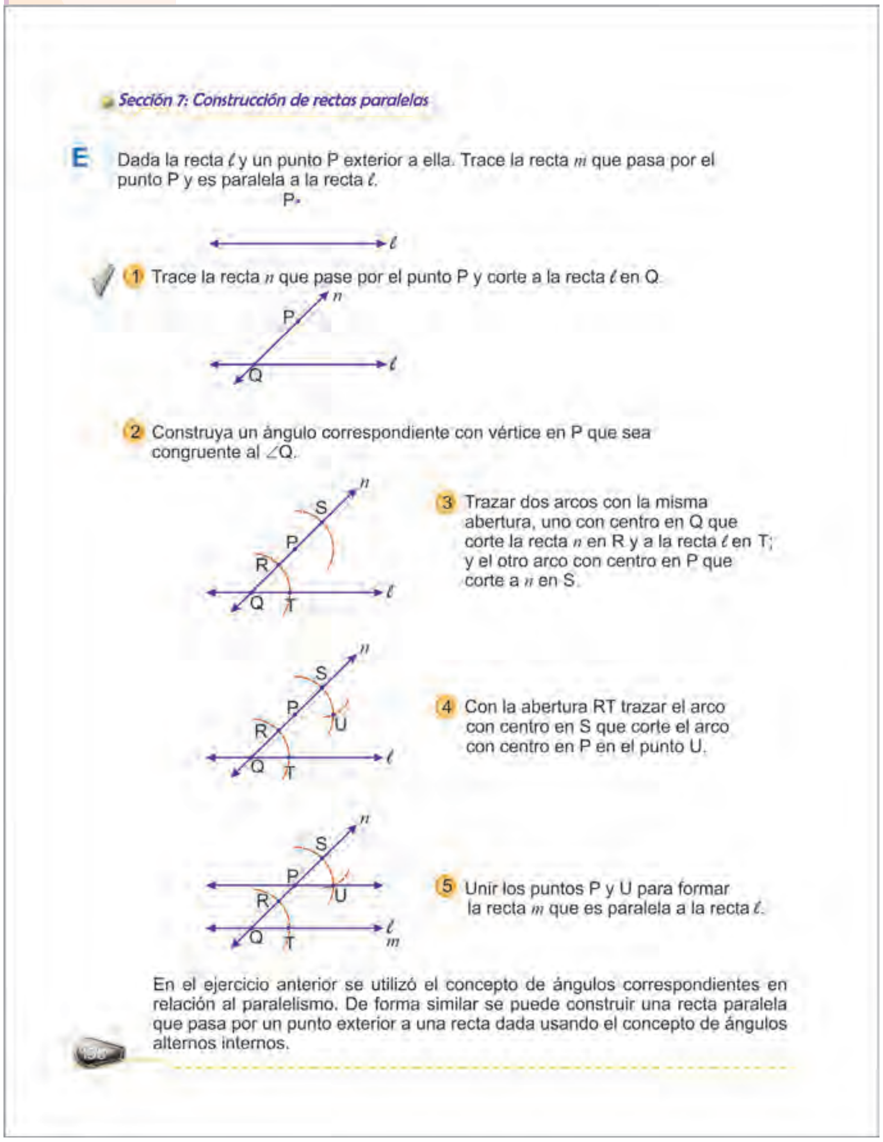
1. Construir la recta paralela. [E]

* Plantee **E** con instrucciones y hacer preguntas para cerciorarse que se comprendió la situación.
* Desarrollar esta construcción en forma similar a como se desarrollaron las construcciones sobre perpendicularidad.
* Hacer énfasis en que se construyen ángulos correspondientes para que la recta trazada sea paralela a la recta dada, esto es utilizando lo visto en la página 154 LE.
* Supervisar el trabajo y ayudar a los estudiantes que tienen dificultades.

Lección 4: (7/9) **Paralelismo**

Objetivo:
• Construir la recta que pasa por un punto exterior a una recta dada y es paralela a ésta, utilizando el concepto de ángulos correspondientes.

Materiales: (M) Regla, compás, lámina con los pasos de la construcción y LE. (N) Regla, compás y LE.


Sección 7: Construcción de rectas paralelas

E Dada la recta ℓ y un punto P exterior a ella. Trace la recta m que pasa por el punto P y es paralela a la recta ℓ.

1. Trace la recta n que pase por el punto P y corte a la recta ℓ en Q.
2. Construya un ángulo correspondiente con vértice en P que sea congruente al $\angle Q$.
3. Trazar dos arcos con la misma abertura, uno con centro en Q que corte la recta n en R y a la recta ℓ en T; y el otro arco con centro en P que corte a n en S.
4. Con la abertura RT trazar el arco con centro en S que corte el arco con centro en P en el punto U.
5. Unir los puntos P y U para formar la recta m que es paralela a la recta ℓ.

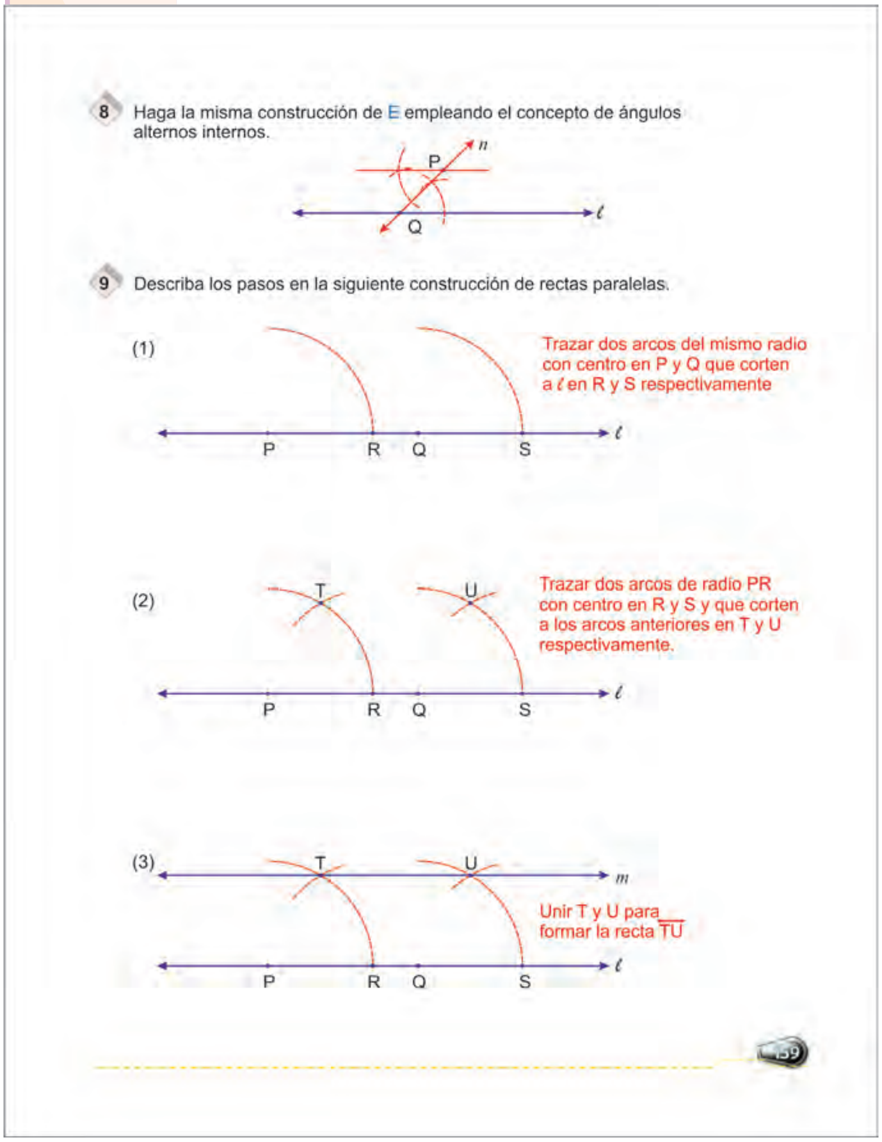
En el ejercicio anterior se utilizó el concepto de ángulos correspondientes en relación al paralelismo. De forma similar se puede construir una recta paralela que pasa por un punto exterior a una recta dada usando el concepto de ángulos alternos internos.

Lección 4: (8/9) Paralelismo

Objetivo:

- Construir la recta que pasa por un punto exterior a una recta dada y es paralela a ésta, utilizando el concepto de ángulos alternos internos.
- Describir los pasos de una construcción de paralelas.

Materiales: Materiales: (M) Regla, compás, y LE. (N) Regla, compás y LE.



8 Haga la misma construcción de E empleando el concepto de ángulos alternos internos.

9 Describa los pasos en la siguiente construcción de rectas paralelas.

1. Resolver 8 .

* Los pasos para esta construcción son similares a la anterior con la diferencia que aquí se usa el concepto de ángulos alternos internos, para ello se debe indicar el lugar donde se construirá el segundo ángulo.

2. Resolver 9 .

* En este ejercicio se pide a los estudiantes que haga el proceso inverso a lo que han hecho anteriormente, es decir, ellos deben enlistar los pasos de la construcción.

* Los pasos deben ser descritos haciendo uso de la regla y/o compás para determinar la distancia de los arcos o rectas trazadas.

* Es importante que los ellos detecten las diferencias entre una ilustración y la que sigue.

* Cuando los pasos son descritos investigue junto a los estudiantes el por qué la recta es paralela. De hecho, la construcción determina dos triángulos equiláteros congruentes sobre una misma recta y los puntos T y U son los extremos de los segmentos de sus alturas que también son congruentes y consecuentemente están a la misma distancia de ℓ.

1. Construir una recta paralela. [F].

* Pedir a los estudiantes que construyan la recta paralela de forma distinta a como lo han hecho en clases anteriores.
* Sino surgen ideas proponer la forma presentada en el LE.
* Desarrollar **F** con instrucciones en forma similar a como se han hecho las construcciones anteriores.
* Discutir con los estudiantes el por qué de cada paso.
* Esta construcción es similar a la que se hizo en 9.

3. Construir una recta perpendicular. [G].

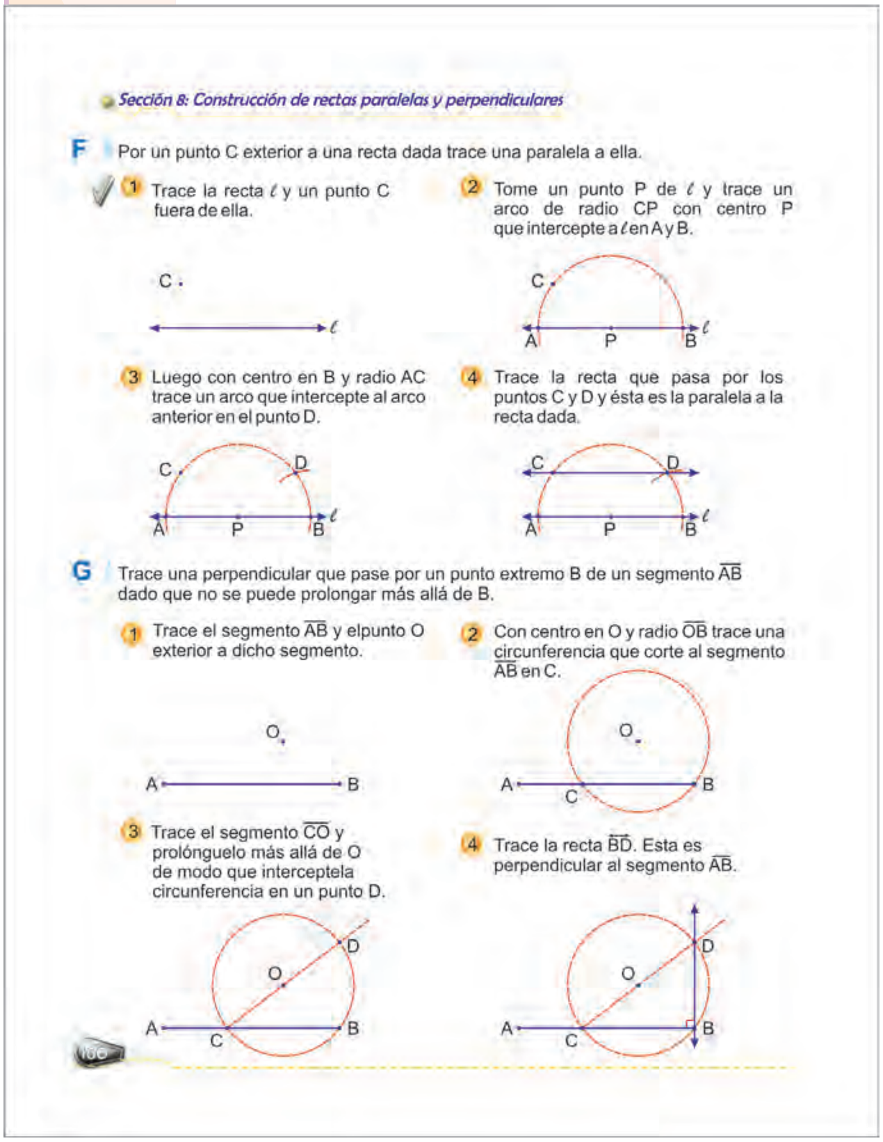
* Desarrollar en forma similar a la anterior.
* Esta construcción se basa en que la medida en grados de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida en grados de su arco interceptado. Note que el arco $\overset{\frown}{CD}$ tiene 180°, por tanto el $\angle$ CBD es recto. (Este tema no ha sido estudiado).

Lección 4: (9/9) **Paralelismo**

Objetivo:

- Conocer otra manera de construir la recta que pasa por un punto exterior a una recta dada y es paralela a ésta.
- Trazar una recta perpendicular a un segmento y que pase por un punto extremo de éste.

Materiales: (M) Regla, compás y LE. (N) Regla, compás y LE.


Sección 8: Construcción de rectas paralelas y perpendiculares

F Por un punto C exterior a una recta dada trace una paralela a ella.

1. Trace la recta ℓ y un punto C fuera de ella.
2. Tome un punto P de ℓ y trace un arco de radio CP con centro P que intercepte a ℓ en A y B.
3. Luego con centro en B y radio AC trace un arco que intercepte al arco anterior en el punto D.
4. Trace la recta que pasa por los puntos C y D y ésta es la paralela a la recta dada.

G Trace una perpendicular que pase por un punto extremo B de un segmento $\overline{AB}$ dado que no se puede prolongar más allá de B.

1. Trace el segmento $\overline{AB}$ y elpunto O exterior a dicho segmento.
2. Con centro en O y radio $\overline{OB}$ trace una circunferencia que corte al segmento $\overline{AB}$ en C.
3. Trace el segmento $\overline{CO}$ y prolónguelo más allá de O de modo que interceptela circunferencia en un punto D.
4. Trace la recta $\overleftrightarrow{BD}$. Esta es perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

Unidad 7: (1~2/2)

Ángulos

Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre ángulos.

Materiales: (M) Regla, compás y LE. (N) Regla, compás y LE

Ejercicios

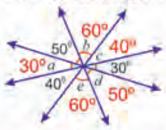
1 Ordene de mayor a menor los ángulos según su medida.
(1) Obtuso (2) Cóncavo (3) Recto (4) Agudo (5) Llano
Cóncavo - llano - obtuso - recto - agudo

2 Identifique los ángulos opuestos por el vértice.



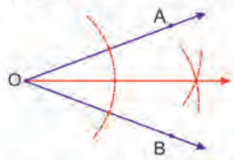
∠x y ∠y
∠w y ∠z

3 Encuentre la medida de los ángulos que faltan.



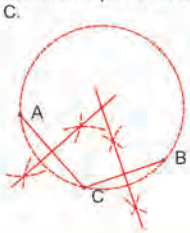
4 Si biseca un ángulo que mide 70°, ¿cuánto miden los 2 ángulos resultantes?
PO: 70 ÷ 2 = 35 R: 35°

5 Biseque el ángulo ∠AOB.



6 ¿Por qué las bisectrices de ángulos adyacentes forman un ángulo recto?
La suma de los ángulos adyacentes es 180°. Las bisectrices dividen en 2 ángulos congruentes cada ángulo adyacente y la suma de estos dos ángulos es la mitad de 180°, es decir, 90°

7 Utilizando el concepto de mediatriz trace la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.



187

1. **Resolver 1 ~ 17 .**

Tipos de ejercicios:

1. Clasificación de ángulos
2. Ángulos opuestos por el vértice
3. Ángulos opuestos por el vértice y suma de ángulos igual a 180º
4. Concepto de bisectriz
5. Construcción de bisectriz
6. Relación entre ángulos adyacentes y sus bisectrices
7. Construcción de mediatriz

8 Clasificación de ángulos formados por dos rectas y su transversal

9 Construcción de bisectrices

10 Construcción de bisectrices utilizando paralelas

Unidad 7: (1~2/2)

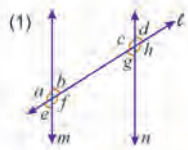
Ángulos

Ejercicios de la unidad

[Continuación]

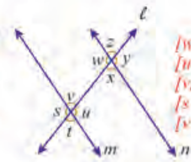
8 Identifique en cada caso los ángulos alternos internos, correspondientes, internos, externos y opuestos por el vértice.

(1)



[c - f; b - g]
[f - h, e - g, a - c, b - d]
[b, c, f, g]
[a, e, d, h]
[a - f, e - b, c - h, g - d]

(2)



[w - u, v - x]
[u - y, t - x, v - z, s - w]
[v, u, w, x]
[s, t, z, y]
[v - t, s - u, w - y, z - x]

9 Construya la bisectriz de un ángulo en el que no aparece su vértice siguiendo los pasos dados a continuación.

R: GD página 167



1. Trace una transversal n.
2. Trace las bisectrices de los ángulos internos.
3. Una el punto A y B (el punto A es la intersección de las dos bisectrices de los ángulos que están a un lado de la transversal y el punto B es la intersección de las otras dos bisectrices).
4. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es la bisectriz buscada.

10 Resuelva el ejercicio anterior siguiendo otro método.

Sugerencia: Construya otro ángulo (con vértice) formado con las rectas paralelas a los lados dados.

R: GD página 167



Ángulos

Ejercicios de la unidad

[Continuación]

11 Encuentre la medida del complemento del ángulo cuya medida es la siguiente.

(1) 45° 45° (2) 32° 58° (3) 89° 1° (4) 72° 18° (5) 18° 72°

12 Encuentre la medida del suplemento del ángulo cuya medida es la siguiente.

(1) 45° 135° (2) 121° 59° (3) 94° 86° (4) 72° 108° (5) 108° 72°

13 Un ángulo es la cuarta parte de su complemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

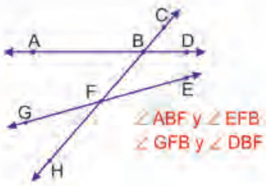
PO: $x + 4x = 90$ $x = 18$ R: 18°

14 Un ángulo es la cuarta parte de su suplemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

PO: $x + 4x = 180$ $x = 36$ R: 36°

15 Identifique todas las parejas de ángulos alternos internos.

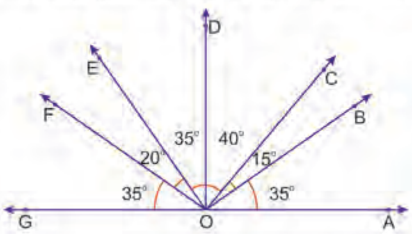
(1)



(2)



16 En la figura de abajo, ¿cuáles parejas de rayos son perpendiculares?



$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OG}$

163

11 Cálculo de ángulos complementarios

12 Cálculo de ángulos suplementarios

13 Cálculo de ángulos complementarios

14 Cálculo de ángulos suplementarios

15 Identificación de ángulos alternos

16 Identificación de rayos perpendiculares

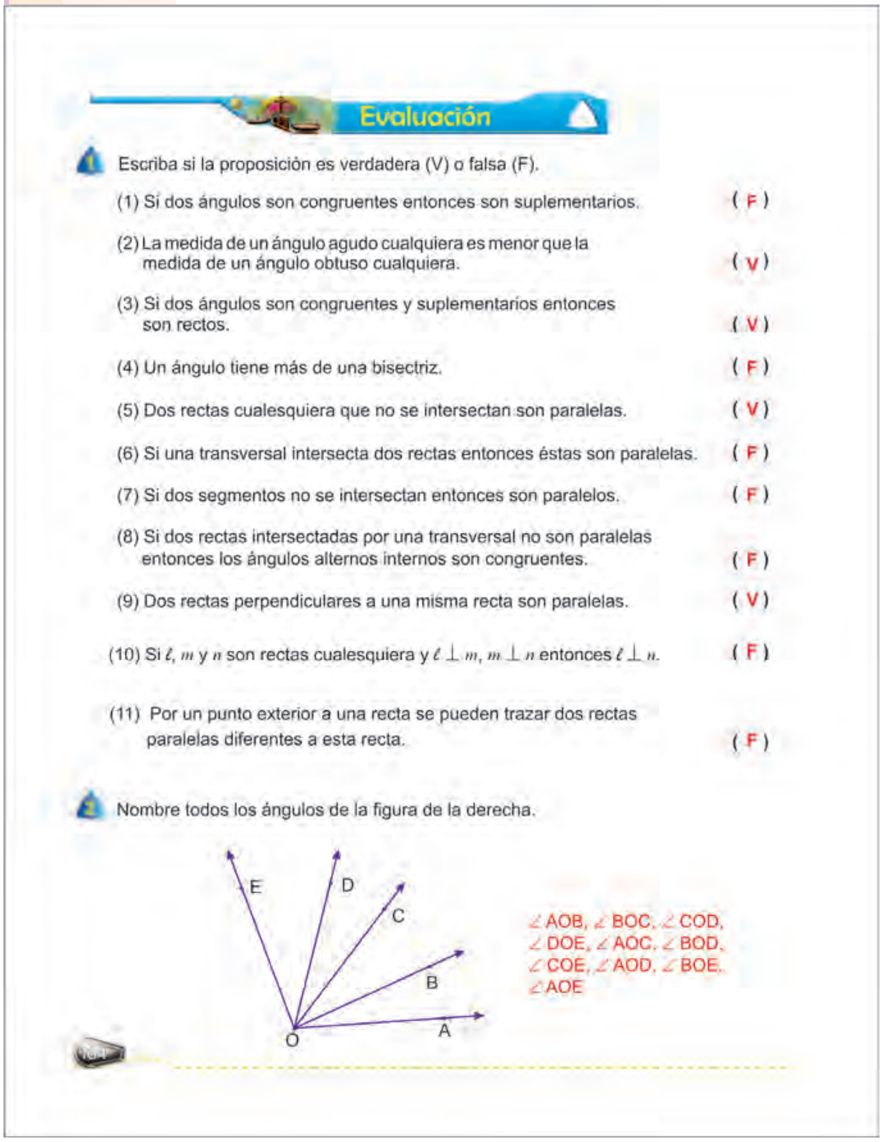
17 Trazo aproximado de ángulos dada su medida

Unidad 7: Ángulos

Evaluación de la unidad

1. **Resolver 1 y 2.**

Continúa en la siguiente página...



Evaluación

1 Escriba si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

(1) Si dos ángulos son congruentes entonces son suplementarios. (F)

(2) La medida de un ángulo agudo cualquiera es menor que la medida de un ángulo obtuso cualquiera. (V)

(3) Si dos ángulos son congruentes y suplementarios entonces son rectos. (V)

(4) Un ángulo tiene más de una bisectriz. (F)

(5) Dos rectas cualesquiera que no se intersectan son paralelas. (V)

(6) Si una transversal intersecta dos rectas entonces éstas son paralelas. (F)

(7) Si dos segmentos no se intersectan entonces son paralelos. (F)

(8) Si dos rectas intersectadas por una transversal no son paralelas entonces los ángulos alternos internos son congruentes. (F)

(9) Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas. (V)

(10) Si ℓ, m y n son rectas cualesquiera y $\ell \perp m$, $m \perp n$ entonces $\ell \perp n$. (F)

(11) Por un punto exterior a una recta se pueden trazar dos rectas paralelas diferentes a esta recta. (F)

2 Nombre todos los ángulos de la figura de la derecha.

∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠DOE, ∠AOC, ∠BOD, ∠COE, ∠AOD, ∠BOE, ∠AOE

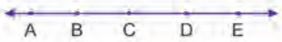
[Continuación]

... viene de la página anterior.

1. **Resolver 3 al 7.**

Continúa en la siguiente página...

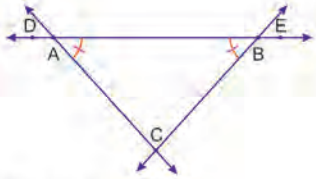
3 ¿Cuántos rayos se pueden nombrar en la siguiente figura?



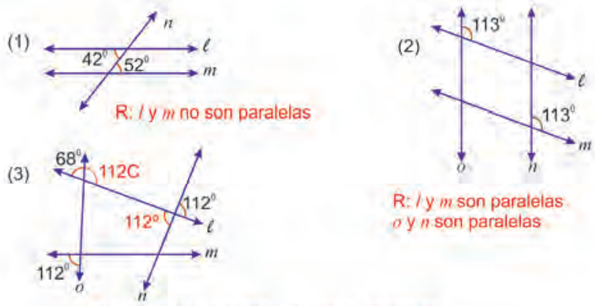
20

4 En la figura de la derecha si ∠BAC ≅ ∠ABC.
¿por qué ∠DAC ≅ ∠GBC?

m ∠ BAC + m ∠ DAC = 180°
m ∠ ABC + m ∠ EBC = 180°
como ∠ BAC ≅ ∠ ABC
entonces ∠ DAC ≅ ∠ EBC



5 Determine en qué caso las rectas son paralelas.

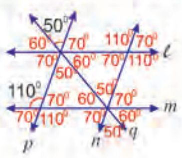


R: *l* y *m* no son paralelas

R: *l* y *m* son paralelas
o y *n* son paralelas

R: *l* y *m* no son paralelas *o* y *n* son paralelas

6 En la siguiente figura si ℓ ∥ *m* y *n* ∥ *p*, ¿cuál es la medida de los demás ángulos?



ORACIÓN DEL HONDUREÑO



¡Bendiga Dios la pródiga tierra en que nací!

Fecunden el sol y las lluvias sus campos labrantíos;
florezcan sus industrias y todas sus riquezas esplendan
bajo su cielo de zafiro.

Mi corazón y mi pensamiento, en una sola voluntad,
exaltarán su nombre, en un constante esfuerzo por su cultura.

Número en acción en la conquista de sus altos valores morales,
factor permanente de la paz y del trabajo, me sumaré a sus energías;
y en el hogar, en la sociedad o en los negocios públicos,
en cualquier aspecto de mi destino, siempre tendré presente
mi obligación ineludible de contribuir a la gloria de Honduras.

Huiré del alcohol y del juego,
y de todo cuanto pueda disminuir mi personalidad,
para merecer el honor de figurar entre sus hijos mejores.

Respetaré sus símbolos eternos y la memoria de sus próceres,
admirando a sus hombres ilustres
y a todos los que sobresalgan por enaltecerla.

Y no olvidaré jamás que mi primer deber será, en todo tiempo,
defender con valor su soberanía, su integridad territorial,
su dignidad de nación independiente;
prefiriendo morir mil veces antes que ver profanado su suelo,
roto su escudo, vencido su brillante pabellón.

¡Bendiga Dios la prodiga tierra en que nací!

Libre y civilizada, agrande su poder en los tiempos
y brille su nombre en las amplias conquistas de la justicia y del derecho.

Froylán Turcios

Guía del Docente - Matemáticas
Séptimo grado de Educación Básica

Elaborada y p d r r aría d d
d r 7

MATEMÁTICAS

Guía del Docente



Altar G1

décimo sexto y último gobernante de copán, Yax Pasaj Chan Yoaal, nos legó en la Gran Plaza un derroche de arte y esplendor en diferentes altares. En la fotografía superior el Altar G1 es una muestra de la complejidad técnica alcanzada por los istas del Período Clásico, de las mandíbulas de una serpiente bicéfala emerge una deidad solar.

Fotografía: © Paúl Martínez

República de Honduras
Secretaría de Educación